Fundamentos de Investigación de Operaciones
Teoría de Decisión

30 de marzo de 2004

En general, un tomador de decisiones debe escoger una acción a_i entre un conjunto de acciones disponibles $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$. De acuerdo al estado de naturaleza s_j que ocurra, con probabilidad de ocurrencia p_j dentro del universo de estados posibles $S = \{s_1, s_2, \cdots, s_m\}$, se obtendrá un retorno r_{ij}.

La situación anterior corresponde a un modelo en que el tomador de decisiones se enfrenta a la naturaleza, por lo tanto, la ganancia o pérdida que se obtenga depende exclusivamente de la decisión que se haya tomado.

1. Criterios de Decisión bajo Incertidumbre

Consideremos el siguiente ejemplo para ilustrar los cuatro principales criterios de decisión bajo incertidumbre.

Ejemplo 1 *El propietario de un puesto de diarios debe decidir cuántos periódicos encargar para la venta. El dueño del puesto debe pagar \$200 pesos por cada diario para venderlos en \$250 cada uno. Los periódicos que no son vendidos durante el día se pierden. La experiencia dice que la demanda diaria varía entre 6 y 10 periódicos, con idéntica probabilidad de ocurrencia. Determine el número de diarios que el propietario debe encargar.*

En el ejemplo, el conjunto de estados de la naturaleza S corresponde a $\{6, 7, 8, 9, 10\}$ que representa los valores posibles de la demanda de periódicos. Como cada estado es equiprobable, se tiene que $p_6 = p_7 = p_8 = p_9 = p_{10} = \frac{1}{5}$. El propietario debe escoger el número de periódicos a encargar a partir de las siguientes posibilidades $A = \{6, 7, 8, 9, 10\}$.

Si el dueño compra i periódicos y le demandan j, la función de utilidad se puede escribir como:

$$\begin{aligned} r_{ij} &= 250i - 200i = 50i \quad (i \leq j) \\ r_{ij} &= 250j - 200i \quad (i > j) \end{aligned}$$

De acuerdo a la expresión anterior es posible tabular los valores posibles de retorno o utilidad (Cuadro **??**).

Dicha matriz se conoce como **matriz de ganancias** y es una representación fundamental para el análisis de un problema de decisiones.

1.1. Acciones Dominadas

¿ Porqué no se consideró la posibilidad de comprar 1, 2, 3,4, 5 o más de 10 periódicos ? La respuesta a esta pregunta tiene que ver con el concepto de acciones dominadas.

	Demanda				
Oferta	6	7	8	9	10
6	300	300	300	300	300
7	100	350	350	350	350
8	−100	150	400	400	400
9	−300	−50	200	450	450
10	−500	−250	0	250	500

Cuadro 1.1: Matriz de Ganancias

Definición 1 *Una acción a_i es una <u>acción dominada</u> por la acción $a_{i'}$ si para todo $s_j \in S$ se tiene que $r_{ij} \leq r_{i'j}$ y para algún estado $s_{j'}$ se cumple que $r_{i'j} < r_{i'j}$.*

Si una acción a_i es dominada, no existe un estado de la naturaleza para el cual a_i sea mejor que $a_{i'}$. Por lo tanto, si una acción es dominada no hay razón para incluirla en las decisiones posibles.

Volviendo al ejemplo, las acciones de ordenar 1, 2, 3, 4 ó 5 diarios están dominadas por la acción de encargar 6 diarios, pues el beneficio de comprar 6 diarios (300) es siempre mayor a esas opciones, independientemente de la cantidad demandada.

Similarmente, la acción de ordenar 11 o más periódicos está dominada por la acción de ordenar 10 diarios. Revisando las acciones del Cuadro **??**, se puede verificar que ninguna de ellas está dominada.

1.2. Criterio Maximin

Para cada acción es posible determinar la peor situación (beneficio mínimo). El criterio Maximin selecciona la mejor opción entre las peores situaciones.

Definición 2 *El criterio Maximin escoge la acción a_i que maximiza el valor de $min_{j \in S}\, r_{ij}$.*

Para el ejemplo en estudio, podemos construir el Cuadro **??**.

Periódicos ordenados	Peor estado de la naturaleza	Retorno del peor estado de la naturaleza
6	6, 7, 8, 9, 10	300
7	6	100
8	6	-100
9	6	-300
10	6	-500

Cuadro 1.2: Matriz de Criterio Maximin

Por lo tanto, la mejor acción será la de ordenar 6 periódicos, con un beneficio asegurado de 300 independientemente de la demanda. Evidentemente este criterio es pesimista y tiende a provocar que el tomador de decisiones no saque provecho a las buenas oportunidades que se le presenten. En el ejemplo, el dueño del puesto de diarios está seguro que no ganará menos de 300, pero tampoco más.

1.3. Criterio Maximax

Para cada acción se determina el retorno máximo (mayor beneficio). El criterio Maximax escoge la acción de mayor retorno.

Definición 3 *El criterio Maximax escoge la acción a_i que maximiza el valor de $max_{j \in S}\ r_{ij}$.*

Para el problema del ejemplo podemos construir el Cuadro **??**. De acuerdo al criterio Maximax (optimista) el dueño debe ordenar 10 diarios.

Periódicos ordenados	Mejor estado de la naturaleza	Retorno del mejor estado de la naturaleza
6	6, 7, 8, 9, 10	300
7	7, 8, 9, 10	350
8	8, 9, 10	400
9	9, 10	450
10	10	500

Cuadro 1.3: Matriz de Criterio Maximax

1.4. Deploración Minimax

El concepto de Deploración Minimax emplea el concepto de costo de oportunidad para obtener la decisión. Para cada posible estado de la naturaleza s_j se debe encontrar la acción $i^*(j)$ que maximiza r_{ij}, es decir, el curso de acción $i^*(j)$ es la mejor opción si ocurre el estado de la naturaleza s_j. Entonces, para cualquier curso de acción a_i y un estado de la naturaleza s_j el costo de oportunidad de a_i con s_j es $r_{i^*(j),j} - r_{ij}$. Por lo tanto, el valor del costo de oportunidad para el mejor curso de acción dado un determinado estado de la naturaleza es siempre nulo. Además, el costo de oportunidad para una acción no óptima dado un curso de acción es siempre positivo. Los valores anteriores se ordenan en una matriz denominada **matriz de costo de oportunidad**.

En el ejemplo, la matriz de costo de oportunidad se muestra en el Cuadro **??**.

	Demanda				
Oferta	6	7	8	9	10
6	$300 - 300 = 0$	$350 - 300 = 5$	$400 - 300 = 100$	$450 - 300 = 150$	$500 - 300 = 200$
7	$300 - 100 = 200$	$350 - 350 = 0$	$400 - 350 = 50$	$450 - 350 = 100$	$500 - 350 = 150$
8	$300 + 100 = 400$	$350 - 150 = 200$	$400 - 400 = 0$	$450 - 400 = 50$	$500 - 400 = 100$
9	$300 + 300 = 600$	$350 + 50 = 400$	$400 - 200 = 200$	$450 - 450 = 0$	$500 - 450 = 50$
10	$300 + 500 = 800$	$350 + 250 = 600$	$400 - 0 = 400$	$450 - 250 = 200$	$500 - 500 = 0$

Cuadro 1.4: Matriz de Costos de Oportunidad

A continuación se aplica el criterio Minimax a la matriz de costo de oportunidad, es decir, por curso de acción se busca la peor situación (máximo costo de oportunidad) escogiendo como curso de acción el mejor dentro de los peores. Así, se construye el Cuadro **??**.

De acuerdo al Cuadro 5, el criterio de Deploración Minimax recomienda ordenar 6 ó 7 periódicos.

Diarios ordenados	Máximo Costo de Oportunidad
6	200
7	200
8	400
9	600
10	800

Cuadro 1.5: Matriz de Deploración Minimax

1.5. Criterio del Valor Esperado

El criterio del Valor Esperado escoge aquella alternativa que genera el mayor retorno esperado. En el problema del ejemplo, todos los estados de naturaleza son equiprobables, por lo tanto el cálculo del valor esperado se reduce a obtener el retorno promedio. Cuando se aplica el criterio del Valor Esperado suponiendo estados de naturaleza equiprobables se habla de **criterio de Laplace**.

Aplicando el criterio de Laplace al problema del ejemplo se obtiene el Cuadro **??**.

Diarios ordenados	Retorno Esperado
6	$\frac{1}{5}(300+300+300+300+300)=300$
7	$\frac{1}{5}(100+350+350+350+350)=300$
8	$\frac{1}{5}(-100+150+400+400+400)=250$
9	$\frac{1}{5}(-300-50+200+450+450)=150$
10	$\frac{1}{5}(-500-250+0+250+500)=0$

Cuadro 1.6: Matriz de Criterio de Laplace

De acuerdo al Criterio del Valor Esperado (o Laplace en este caso) se recomienda seguir el curso de acción de ordenar 6 ó 7 diarios.

Supongamos ahora que la probabilidades p_j asociadas a los estados de la naturaleza s_j son $P=\{\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6}\}$. En este caso, el cálculo del valor esperado para cada curso de acción se resume en el Cuadro **??**.

Diarios ordenados	Retorno Esperado
6	$\frac{1}{4}300+\frac{1}{4}300+\frac{1}{6}300+\frac{1}{6}300+\frac{1}{6}300=300$
7	$\frac{1}{4}100+\frac{1}{4}350+\frac{1}{6}350+\frac{1}{6}350+\frac{1}{6}350=287{,}5$
8	$-\frac{1}{4}100+\frac{1}{4}150+\frac{1}{6}400+\frac{1}{6}400+\frac{1}{6}400=212{,}5$
9	$-\frac{1}{4}300-\frac{1}{4}50+\frac{1}{6}200+\frac{1}{6}450+\frac{1}{6}450=95{,}8$
10	$-\frac{1}{4}500-\frac{1}{4}250+\frac{1}{6}0+\frac{1}{6}250+\frac{1}{6}500=-62{,}5$

Cuadro 1.7: Matriz de Criterio del Valor Esperado

Finalmente, con los valores de probabilidades adoptados el criterio del Valor Esperado recomienda seguir el curso de acción de ordenar 6 diarios, pues en términos esperados se obtendría el mayor retorno.

2. Árboles de Decisión

Frecuentemente deben tomarse una serie de decisiones en distintos momentos en el tiempo, en estos casos se recurre a los árboles de decisión para determinar la solución óptima. La idea es descomponer un problema complejo en varios problemas simples. Consideremos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2 *Una fábrica está avaluada en 150 millones. La fábrica desea incorporar un nuevo producto al mercado. Existen tres estrategias para incorporar el nuevo producto:*

Alternativa 1 *Hacer un estudio de mercado del producto de forma de determinar si se introduce o no al mercado.*

Alternativa 2 *Introducir inmediatamente el producto al mercado (sin estudio).*

Alternativa 3 *No lanzar inmediatamente el producto al mercado (sin estudio).*

En ausencia de estudio de mercado, la fábrica estima que el producto tiene un 55 % de posibilidades de ser exitoso y de 45 % de ser un fracaso. Si el producto es exitoso, la fábrica aumentaría en 300 millones su valor, si el producto fracasa se devaluaría en 100 millones.

El estudio de mercado vale 30 millones. El estudio predice que existe un 60 % de probabilidad de que el producto sea exitoso. Si el estudio de mercado determina que el producto será exitoso, existe un 85 % de posibilidades de que efectivamente lo sea. Si el estudio de mercado determina que el producto será un fracaso, existe sólo un 10 % de posibilidades de que el producto sea exitoso. Si la empresa no desea correr riesgos (desea maximizar el valor esperado de la empresa)
¿ Qué estrategia debería seguir ?

Para poder construir un árbol de decisión para el problema debemos adoptar algunas convenciones:

Un **nodo de decisión** (denotado por □) representa un punto donde se debe tomar una decisión. Cada rama representa una decicisión posible. En el ejemplo, podemos dibujar la decisión de hacer o no un estudio de mercado (figura **??**):

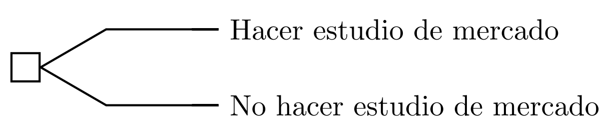


Figura 2.1: Representación de un nodo de decisión

Un **nodo de estados de la naturaleza** (denotado por ○) representa un punto donde alguno de varios eventos aleatorios ocurre. Cada rama representa un estado de naturaleza posible. Usualmente se suele escribir sobre cada rama la probabilidad de que dicho evento ocurra. En el ejemplo, podemos dibujar el evento de que el producto tenga o no éxito en el mercado de acuerdo al estudio (figura **??**):

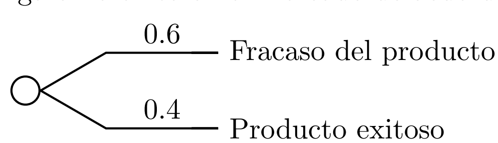


Figura 2.2: Representación gráfica de un nodo de estados de la naturaleza

Una rama de un árbol de decisión es una **rama terminal** si no llega a otro nodo de donde emanen otras ramas. En el ejemplo, las ramas que indican el éxito o el fracaso definitivo del producto son ramas terminales del árbol. Como se está maximizando el valor final esperado de la empresa, se debe representar el valor final asociada al lado derecho de cada rama terminal. Por ejemplo, la rama terminal que indica el fracaso del producto habiendo realizado el estudio representa un valor final de: $150-30-100 = 20$ millones. Como se desea maximizar el valor esperado de la empresa, se debe incluir el valor esperado en todas las ramas terminales del árbol.

Como se desea obtener la decisión que maximiza el valor esperado de la empresa, iremos calculando los valores esperados de derecha a izquierda (retornando) en el árbol. En cada nodo de estados de naturaleza, calcularemos el valor esperado y lo escribiremos en el $\bigcirc$ del nodo. En cada nodo de decisón marcaremos la mejor alternativa y descartaremos las otras. Frecuentemente se escribe el valor esperado de la acción escogida al interior del $\square$ del nodo de decisiones. Así, se continúa calculando los valores esperados de derecha a izquierda en el árbol hasta llegar a la primera decisión.

Construyamos el árbol para el ejemplo (figura **??**):

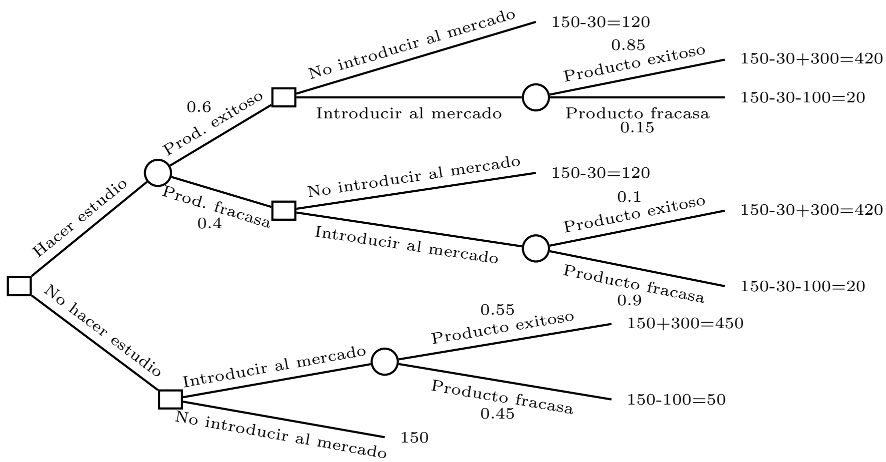


Figura 2.3: Árbol de decisiones para el ejemplo.

De acuerdo al árbol podemos obtener el valor esperado de acuerdo a las distintas situaciones:

1. Introducir el producto al mercado depués de un estudio de mercado favorable. El valor esperado de la empresa sería: $0{,}85(420) + 0{,}15(20) = 360$ millones.

2. Introducir el producto a pesar de un resultado desfavorable en el estudio de mercado. En este caso el valor esperado de la empresa sería $0{,}1(420) + 0{,}9(20) = 60$ millones.

3. Introducir el producto sin realizar el estudio de mercado. El valor esperado de la fábrica está dado por $0{,}55(450) + 0{,}45(50) = 270$ millones.

Luego, es posible evaluar tres nodos de decisión:

1. Decisión después del resultado favorable del estudio de mercado. La decisión de lanzar el producto genera un valor esperado mucho mayor al de no lanzarlo. Por lo tanto, en este nodo se optará por la opción de lanzar el producto con un valor esperado de 360 millones, descartando la otra opción.

2. Decisión después del resultado negativo del estudio de mercado. En este caso no introducir el producto genera un valor esperado mayor a de lanzarlo, por lo tanto descartamos la opción de lanzarlo y marcamos como favorable la alternativa de no lanzar el producto al mercado con un valor esperado de 120 millones.

3. Decisión si realizar el estudio de mercado. En este caso lanzar el producto genera un valor esperado de 270 millones, superior a la acción de no introducirlo.

Ahora se debe evaluar el valor esperado para la decisión de realizar el estudio de mercado: $0{,}6(360) + 0{,}4(120) = 264$ millones. El valor anterior se incorpora al ◯ respectivo.

Finalmente, se debe evaluar la opción de realizar o no el estudio de mercado. Llevar a cabo el estudio de mercado posee un valor esperado de 264 millones, no realizar el estudio representa un valor esperado de 270 millones. Luego, marcamos la opción de no realizar el estudio de mercado e ingresamos 270 en la □ respectiva.

En resumen, la alternativa que maximiza el valor esperado de la compañía corresponde a no realizar el estudio de mercado y lanzar el producto al mercado, con un valor esperado de 270 millones. Se deja como ejercicio al lector construir la matriz de retornos del problema, aplicar los criterios previamente descritos y comparar las decisiones obtenidas. El árbol resuelto queda (figura **??**):

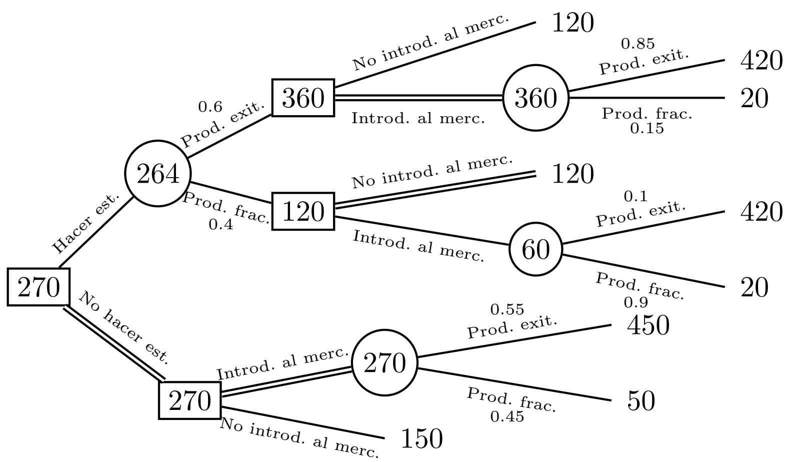


Figura 2.4: Árbol de decisiones resuelto.

2.1. Valor Esperado de la Información Muestral

Los árboles de decisión pueden ser empleados como una medida de la información entregada por una muestra o un test. ¿Cuál es el valor de la información proporcionada por el estudio de mercado del producto?

Comencemos determinando el valor esperado final si el test no tuviera costo. Llamaremos a este valor **valor esperado con información muestral (EVWSI)**. De acuerdo al árbol anterior, actuando óptimamente el valor esperado será $264+30 = 294$ millones. Luego, se tiene que EVWSI=294 millones.

Ahora, determinemos el valor esperado final si no existiera la posibilidad de hacer un estudio de mercado. Llamaremos a este número **valor esperado con la información original (EVWOI)**. De la rama del árbol donde no se emplea el test obtenemos que EVWOI=270 millones. Luego, el **valor esperado de la información muestral (EVSI)** se define como: EVSI=EVWSI-EVWOI.

En el ejemplo estudiado, EVSI corresponde al valor máximo que la empresa estaría dispuesta a pagar por la información de un estudio de mercado, así EVSI=294-270=24 millones. Debido a que el costo del estudio de mercado (30 millones) excede al valor de EVSI, la empresa no debe llevar a cabo este estudio.

2.2. Valor Esperado de la Información Perfecta

Por **información perfecta** debemos entender que la ocurrencia o no ocurrencia de todos los eventos con incertidumbre son conocidos de antemano por el tomador de decisiones. Con dicha información se puede volver a plantear un árbol de decisiones en el cual se conoce previamente la ocurrencia de los eventos, es decir, el tomador de decisiones posee información perfecta. El valor esperado de dicho árbol de decisión se conoce como **valor esperado con información perfecta (EVWPI)**. Luego, el **valor esperado de la información perfecta (EVPI)** corresponde a: EVPI=EVWPI-EVWOI.

Para el ejemplo en estudio podemos construir el siguiente árbol con información perfecta (figura **??**):

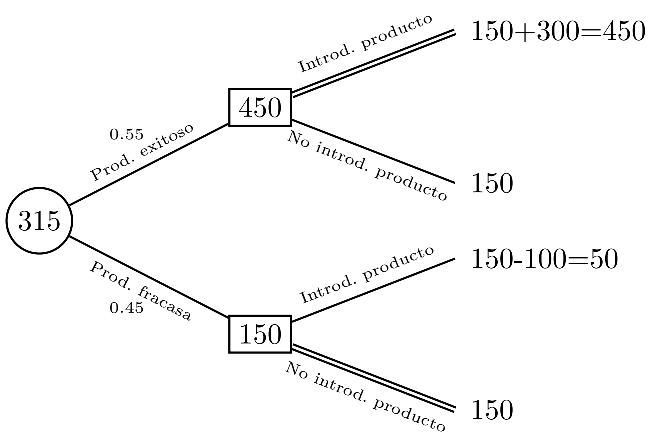


Figura 2.5: Árbol de decisiones con información perfecta.

Por lo tanto, se obtiene que EVWPI=315 millones. Entonces, EVPI=315-270=45 millones. Luego, se podría pagar hasta 45 millones por información perfecta o 100 % confiable. El valor anterior representa una cota superior para el valor de cualquier estudio de mercado o test en general, sin importar el nivel de confiabilidad.

2.3. Teorema de Bayes

En un problema de decisiones existen varios estados de la naturaleza, cada uno de ellos puede representar un valor distinto de retorno esperado. En el ejemplo estudiado los dos principales estados de la naturaleza tienen que ver con el hecho que el producto tenga éxito (S_1) o no lo tenga ($\bar{S_1}$) al ser incorporado al mercado. Se tiene además, antes de realizar el estudio de mercado, la probabilidad de ocurrencia de cada uno de los estados de la naturaleza. Estas probabilidades se denominan **probabilidades previas o a priori** de los estados de la naturaleza, en el ejemplo podemos decir que: $IP(S_1) = 0{,}55$ y $IP(\bar{S_1}) = 0{,}45$.

Para diferentes estados de la naturaleza, diferentes cursos de acción pueden ser óptimos. En el ejemplo, la empresa debería introducir el producto si va a ocurrir S_1 y no debería introducirlo si va a ocurrir $\bar{S_1}$. De acuerdo a esto, tiene sentido comprar información que otorgue mayor conocimiento sobre los distintos estados de la naturaleza para poder tomar una mejor decisión. En el ejemplo, el resultado del estudio de mercado permite decidir si introducir o no el producto.

Así, el tomador de decisiones recibe un conjunto de información producto de los resultados de varios experimentos. Si $s_1, s_2, \ldots, s_n$ denotan los posibles estados de la naturaleza y $o_1, o_2, \ldots, o_m$ denotan los resultados obtenidos de m experimentos, entonces el tomador de decisiones dispone de las **probabilidades condicionales** $IP(s_i|o_j)(i = 1, 2, \ldots, n; j = 1, 2, \ldots, m)$. Luego, el resultado de los experimentos entrega una información adicional respecto de la probabilidad de ocurrencia de los distintos eventos. Las probabilidades $IP(s_i|o_j)$ se denominan **probabilidades posteriores o a posteriori** de los distintos estados de la naturaleza.

Volviendo al ejemplo anterior, el experimento corresponde al estudio de mercado y los dos resultados posibles son que determine que el producto va a tener éxito (T_1) o bien que prediga que el producto va a ser un fracaso ($\bar{T}_1$). Por lo tanto podemos escribir las probabilidades a posteriori como:

$$\begin{array}{ll} IP(S_1|T_1) = 0{,}85 & IP(S_1|\bar{T}_1) = 0{,}10 \\ IP(\bar{S}_1|T_1) = 0{,}15 & IP(\bar{S}_1|\bar{T}_1) = 0{,}90 \end{array}$$

Luego, el conocimiento de un resultado favorable del estudio de mercado incrementa la probabilidad de éxito del producto y disminuye la probabilidad de fracaso. Similarmente, un resultado desfavorable al producto del estudio de mercado disminuye la probabilidad de éxito del producto e incrementa la probabilidad de fracaso.

Sin embargo, en muchas situaciones se conocen las probabilidades previas $IP(s_i)$ para cada estado de la naturaleza y en lugar de las probabilidades a posteriori se conoce la probabilidad $IP(o_j|s_i)$. Esta probabilidad indica la factibilidad de observar un determinado resultado como producto de un experimento.

Volviendo al ejemplo, podríamos conocer las probabilidades previas o absolutas $IP(S_1) = 0{,}55$ y $IP(\bar{S}_1) = 0{,}45$ y las probabilidades condicionales $IP(T_1|S_1) = \frac{51}{55}$, $IP(\bar{T}_1|S_1) = \frac{4}{55}$, $IP(T_1|\bar{S}_1) = \frac{9}{45}$ y $IP(\bar{T}_1|\bar{S}_1) = \frac{36}{45}$.

Las probabilidades condicionales anteriores pueden ser interpretadas como que de un universo de 55 encuestas realizadas en el estudio de mercado, 51 han detectado una acogida favorable para el nuevo producto y 4 han mostrado el rechazo hacia producto nuevo.

Si sólo se hubiera conocido las probabilidades anteriores para resolver el ejemplo en estudio, se hubiera requerido aplicar el teorema de Bayes para poder completar el árbol de decisión.

Definición 4 *Sean A y B dos eventos no independientes, entonces se cumple que:*

$$IP(A|B) = \frac{IP(A \cap B)}{IP(B)}$$

$IP(A|B)$ se dice probabilidad de ocurrencia de A condicionada a la ocurrencia de B.

Definición 5 *Sea A un evento condicionado a los eventos S_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, entonces:*

$$IP(A) = IP(A|S_1)IP(S_1) + IP(A|S_2)IP(S_2) + \cdots + IP(A|S_n)IP(S_n)$$

IP(A) se dice la probabilidad total o marginal de ocurrencia del evento A.

Teorema 1 *(Bayes) Sean A y B dos eventos no independientes, entonces se cumple que:*

$$IP(A|B) = \frac{IP(B|A)IP(A)}{IP(B)}$$

El teorema de Bayes se puede demostrar fácilmente a partir de las dos definiciones anteriores.

Volviendo al ejemplo, se puede calcular:

$$\begin{array}{lllllll}
IP(S_1 \cap T_1) & = & IP(S_1)IP(T_1|S_1) & = & 0{,}55\frac{51}{55} & = & 0{,}51 \\
IP(S_1 \cap \bar{T}_1) & = & IP(S_1)IP(\bar{T}_1|S_1) & = & 0{,}55\frac{4}{55} & = & 0{,}04 \\
IP(\bar{S}_1 \cap T_1) & = & IP(\bar{S}_1)IP(T_1|\bar{S}_1) & = & 0{,}45\frac{9}{45} & = & 0{,}09 \\
IP(\bar{S}_1 \cap \bar{T}_1) & = & IP(\bar{S}_1)IP(\bar{T}_1|\bar{S}_1) & = & 0{,}45\frac{36}{45} & = & 0{,}36
\end{array}$$

A continuación se puede calcular la probabilidad de ocurrencia de cada resultado del estudio de mercado (probabilidad marginal) de los eventos T_1 y $\bar{T}_1$.

$$\begin{array}{lllllll}
IP(T_1) & = & IP(S_1 \cap T_1) + IP(\bar{S}_1 \cap T_1) & = & 0{,}51 + 0{,}09 & = & 0{,}60 \\
IP(\bar{T}_1) & = & IP(S_1 \cap \bar{T}_1) + IP(\bar{S}_1 \cap \bar{T}_1) & = & 0{,}04 + 0{,}36 & = & 0{,}40
\end{array}$$

Finalmente, podemos aplicar la regla de Bayes para obtener las probabilidades deseadas:

$$\begin{array}{lllllll}
IP(S_1|T_1) & = & \frac{IP(T_1|S_1)IP(S_1)}{IP(T_1)} & = & \frac{0{,}51}{0{,}60} & = & 0{,}85 \\
IP(\bar{S}_1|T_1) & = & \frac{IP(T_1|\bar{S}_1)IP(\bar{S}_1)}{IP(T_1)} & = & \frac{0{,}09}{0{,}60} & = & 0{,}15 \\
IP(S_1|\bar{T}_1) & = & \frac{IP(\bar{T}_1|S_1)IP(S_1)}{IP(\bar{T}_1)} & = & \frac{0{,}04}{0{,}40} & = & 0{,}10 \\
IP(\bar{S}_1|\bar{T}_1) & = & \frac{IP(\bar{T}_1|\bar{S}_1)IP(\bar{S}_1)}{IP(\bar{T}_1)} & = & \frac{0{,}36}{0{,}40} & = & 0{,}90
\end{array}$$

Las probabilidades a posteriori calculadas pueden ser empleadas para completar el árbol de decisiones del problema.

3. Ejemplos Adicionales

3.1. Exploración de Gas

Una gran compañía energética ofrece al dueño de un terreno US$60.000 por los derechos de exploración de gas natural en un sitio determinado y la opción para desarrollo futuro. La opción, si se ejerce, vale US$600.000 adicionales para el propietario, pero esto ocurrirá sólo si se descubre gas natural durante la etapa de exploración. El propietario, considerando que el interés de la compañía es una buena indicación de que existe gas, está tentado en desarrollar el mismo el campo. Para hacer esto deberá contratar equipos locales con experiencia en explotación y desarrollo. El costo inicial es de US$10.000, los que se perderán si no se encuentra gas, el propietario estima un beneficio neto de 2 millones de dólares.

1. Evalúe algunos criterios de incertidumbre para determinar cual decisión tomar.

2. Suponga ahora que la probabilidad de encontrar gas es de 0.6 ¿Qué decisión debe tomar el propietario y cuál sería la ganancia esperada?

3. Para mayor seguridad el propietario ha decidido realizar pruebas de sonido en el sitio en donde se sospecha que hay gas natural, a un costo de US$30.000. Las pruebas indican que no hay gas presente, pero la prueba no es 100 % confiable. La compañía que realizó las pruebas acepta que hay 30 % de las veces la prueba indicará que no hay gas cuando en realidad éste existe. Cuando no existe gas, la prueba es acertada el 90 % de las veces. Utilizando estos datos, actualícese la estimación inicial del propietario de que la probabilidad de encontrar gas es de 0.6 y determine la decisión a tomar.

Respuesta:

En este caso exiten ingresos y costos, por lo tanto es razonable plantearlo como un problema de maximación de utilidades:

$$\underline{\text{Objetivo}} \; : \; \text{Maximizar ganancias}$$

Los estados de naturaleza están asociados a que se encuentre o no gas durante la exploración del terreno, luego:

$$\begin{aligned} S_1 &= \text{Se encuentra gas natural en la etapa de exploración} \\ \bar{S_1} &= \text{No se encuentra gas natural en la etapa de exploración} \end{aligned}$$

Evidentemente, los cursos de acción disponible son sólo dos:

$$\begin{aligned} A_1 &= \text{Vender los derechos de exploración} \\ A_2 &= \text{Realizar exploración por cuenta propia} \end{aligned}$$

Luego, podemos construir la matriz de retorno del problema (en miles):

	S_1	S_2
A_1	$600 + 60 = 660$	60
A_2	$2000 - 10 = 1990$	-10

Cuadro 3.1: Matriz de Ganancias

1. En primer lugar podemos aplicar el cirterio Maximin, es decir, determinar la máxima ganancia para la peor situación por cada curso de acción.

$$\begin{aligned} A_1 &\rightarrow \text{lo peor} = 60000 \quad \rightarrow \quad A_1 \\ A_2 &\rightarrow \text{lo peor} = -10000 \end{aligned}$$

A continuación podemos aplicar el criterio Maximax:

$$\begin{aligned} A_1 &\rightarrow \text{lo mejor} = 660000 \\ A_2 &\rightarrow \text{lo mejor} = 1990000 \quad \rightarrow \quad A_2 \end{aligned}$$

Para aplicar el criterio de Deploración Minimax debemos construir la matriz de costo de oportunidad (Cuadro 9).

	S_1	S_2
A_1	1330000	0
A_2	0	70000

Cuadro 3.2: Matriz de Costo de Oportunidad

Por lo tanto aplicando el criterio Minimax a la matriz de costo de oportunidad:

$$\begin{aligned} A_1 &\rightarrow \text{lo peor (mayor costo)} = 1330000 \\ A_2 &\rightarrow \text{lo peor (mayor costo)} = 70000 \quad \rightarrow \quad A_2 \end{aligned}$$

Finalmente, podemos aplicar el criterio de Laplace:

$$\begin{array}{rcl c l} E[A_1] & = & \frac{1}{2}660000 + \frac{1}{2}60000 & = & 360000 \\ E[A_2] & = & \frac{1}{2}1990000 - \frac{1}{2}10000 & = & 990000 \end{array}$$

Luego, conviene seguir el curso de acción A_2.

2. Para aplicar el criterio del valor esperado debemos considerar entonces que $IP(S_1) = 0{,}6$ y $IP(\bar{S_1}) = 0{,}4$. Así:

$$\begin{array}{rcl c l} E[A_1] & = & \frac{3}{5}660000 + \frac{2}{5}60000 & = & 420000 \\ E[A_2] & = & \frac{3}{5}1990000 - \frac{2}{5}10000 & = & 1190000 \end{array}$$

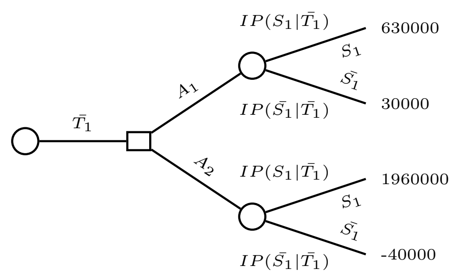
3. En este caso es preciso incorporar el estado de la naturaleza relativo al hecho de que las pruebas predigan la existencia de gas. Sea:

$$\begin{array}{rcl} T_1 & = & \text{Las pruebas determinan que sí existe gas} \\ \bar{T_1} & = & \text{Las pruebas determinan que no existe gas} \end{array}$$

De acuerdo a la notación empleada, la información probabilística entregada se puede escribir como:

$$\begin{array}{rcl} IP(\bar{T_1}|S_1) & = & 0{,}3 \\ IP(\bar{T_1}|\bar{S_1}) & = & 0{,}9 \end{array}$$

Como se sabe que las pruebas arrojaron como resultado que no existe gas, podemos graficar el siguiente árbol de decisiones:



Luego, podemos calcular la probabilidad absoluta de que el resultado de las pruebas sea desfavorable:

$$IP(\bar{T_1}) = IP(\bar{T_1}|S_1)IP(S_1) + IP(\bar{T_1}|\bar{S_1})IP(\bar{S_1}) = 0{,}3 \times 0{,}6 + 0{,}9 \times 0{,}4 = 0{,}54$$

Luego, de acuerdo a la regla de Bayes podemos obtener la probabilidad que necesitamos para resolver el árbol.

$$IP(S_1|\bar{T_1}) = \frac{IP(\bar{T_1}|S_1)IP(S_1)}{IP(\bar{T_1})} = \frac{0{,}3 \times 0{,}6}{0{,}54} = \frac{1}{3}$$

De acuerdo al valor anterior se puede actualizar el cálculo de los valores esperados:

$$\begin{array}{rcl c l} E[A_1] & = & \frac{1}{3} \times 630000 + \frac{2}{3} \times 30000 & = & 230000 \\ E[A_2] & = & \frac{1}{3} \times 1960000 - \frac{2}{3} \times 40000 & \approx & 626667 \end{array}$$

Luego, a pesar del resultado desfavorable de las pruebas, la decisión que maximiza los retornos esperados corresponde al curso de acción A_2.

3.2. Indicadores Biomédicos

Con el problema de la contaminación en Santiago el Ministerio de Salud desea que se incorporen indicadores biomédicos para determinar una alerta ambiental. El programa será puesto en marcha blanca a partir de Junio. De acuerdo al resultado de esta marcha blanca sería posible adoptar estos mecanismos para el control ambiental en el futuro.

Se sabe que aplicar el plan de alerta ambiental tiene un costo neto de US$1.000. El nivel actual para declarar alerta ambiental se ha alcanzado históricamente el 50 % de las veces. Con los nuevos indicadores el nivel de activación de alerta ambiental se alcanzaría el 80 % de las veces. Se espera que con este nuevo nivel de activación más estricto, cuando no se active la alerta ambiental los hospitales estarán saturados el 30 % de las veces, reduciendo de esta manera lo que ocurre actualmente que llega al 60 %.

Se estima que el tener los hospitales saturados incurre en un costo de US$5.000. La probabilidad histórica de tener los hospitales saturados es de 65 %. Si los hospitales se saturan se alcanza el nivel actual de alerta ambiental el 54 % de las veces ¿ Cuál debería ser la probabilidad de que los hositales estén saturados dado el nuevo nivel de activación de alerta ambiental de tal forma que los indicadores biomédicos sean incorporados a la decisión ?

Respuesta:

De acuerdo a la información del enunciado es razonable plantear el problema en términos de minimización de costo debido a la contaminación. Así:

$$\underline{\text{Objetivo}} \quad : \quad \text{Minimizar costos}$$

Los costos entregados en el enunciado corresponden a US$ 1000 por aplicar el plan de alerta ambiental y a US$5000 por el hecho que se saturen los hospitales. A continuación podemos definir los estados de la naturaleza. Sea:

$$\begin{aligned} S_1 &= \text{Se alcanza el nivel } \underline{\text{actual}} \text{ mínimo} \\ S_2 &= \text{Se alcanza el nivel } \underline{\text{nuevo}} \text{ mínimo} \\ S_3 &= \text{Hospitales se saturan} \end{aligned}$$

Luego, la información probabilística entregada en el enunciado puede ser escrita de acuerdo a los estados anteriormente definidos:

$$\begin{array}{lcccl} IP(\text{alcanzar nivel actual mínimo}) & = & 0{,}5 & = & IP(S_1) \\ IP(\text{alcanzar nivel nuevo mínimo}) & = & 0{,}8 & = & IP(S_2) \\ IP(\text{hospitales saturados} \mid \text{no se alcanza nivel nuevo mínimo}) & = & 0{,}3 & = & IP(S_3|\bar{S}_2) \\ IP(\text{hospitales saturados} \mid \text{no se alcanza nivel actual mínimo}) & = & 0{,}6 & = & IP(S_3|\bar{S}_1) \\ IP(\text{hospitales saturados}) & = & 0{,}65 & = & IP(S_3) \\ IP(\text{alcanzar nivel actual mínimo} \mid \text{hospitales saturados}) & = & 0{,}54 & = & IP(S_1|S_3) \end{array}$$

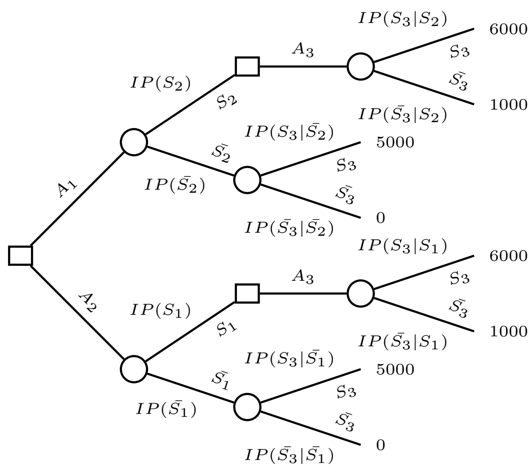
Los cursos de acción disponibles son:

$$\begin{aligned} A_1 &= \text{Incorporar indicadores biomédicos} \\ A_2 &= \text{No incorporar indicadores biomédicos} \\ A_3 &= \text{Aplicar plan de alerta ambiental} \end{aligned}$$

En el enunciado se pregunta por una probabilidad de forma que se incorpore los indicadores biomédicos a la decisión. En términos matemáticos esto es equivalente a imponer que el valor esperado del costo sea menor al incorporar los indicadores biomédicos frente a no incorporarlos. Es decir:

$$IP(S_3|S_2) = \,? \quad \text{tq.} \quad E[A_1] < E[A_2]$$

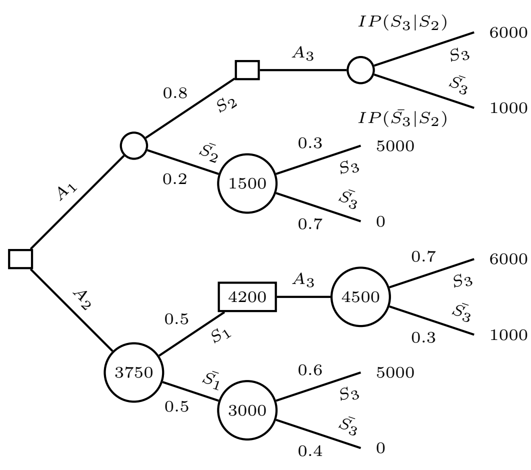
Construyendo un árbol de decisión:



Con los datos entregados se puede calcular:

$$IP(S_3|S_1) = \frac{IP(S_1|S_3)IP(S_3)}{IP(S_1)} = \frac{0{,}54 \times 0{,}65}{0{,}5} = 0{,}7$$

Resolviendo el árbol se tiene:



Por lo tanto, podemos calcular los valores esperados de cada curso de acción:

$$\begin{aligned}
E[A_1] &= 1500 \times 0{,}2 + 0{,}8\,(6000\,IP(S_3|S_2) + 1000\,(1 - IP(S_3|S_2))) \\
E[A_1] &= 4000\,IP(S_3|S_2) + 1100
\end{aligned}$$

Luego, imponiendo la condición de que el valor esperado del curso de acción A_1 sea menor:

$$E[A_1] < E[A_2] \Rightarrow E[A_1] < 3750 \Rightarrow IP(S_3|S_2) < 0{,}6625$$

3.3. Tren Rápido

Con el problema de congestión vehicular y de la sobrepoblación en Santiago, el Ministerio de Obras Públicas desea evaluar la instalación de un tren rápido que conecte las ciudades de Valparaíso y Santiago y puntos intermedios como Curauma, Casa Blanca y Curacaví.

Analizando lo que sucede los fines de semana, se determinó que actualmente un número promedio de 1000 vehículos a la hora realizan el tramo Santiago-Valparaíso los días viernes en horario de punta. Se espera que el tren rápido reduzca el flujo vehicular y, en consecuencia, disminuya la congestión en los peajes. Un estudio realizado permitió determinar que los 1000 vehículos actualmente se demoran en promedio más de 3 horas el 80 % de las veces, lo que genera un malestar en el conductor evaluado en 3000 UM y un aumento en el costo normal de la bencina (con menos de 3 horas evaluado en 4000 UM) y use del vehículo evaluado en 6000 UM y un aumento del riesgo de accidente evaluado en 2000 UM. Por otro lado, se sabe que si el flujo de vehículos es inferior a 400 a la hora y mayor que 199 un vehículo demorará menos de 3 horas en el 70 % de los casos. Por otro lado se sabe que si el flujo de vehículos es inferior a 200 a la hora la probabilidad de que un vehículo tarde más de 3 horas es de 0.2. Se puede suponer que por sobre 400 vehículos se sigue el mismo comportamiento que en el caso de los 1000 vehículos a la hora.

Si se asume que en cada auto viaja en promedio 2 personas y que el costo del pasaje en tren sería de 5000 UM por persona ¿Cuál debería ser el flujo vehicular para que en términos operacionales el tren fuera rentable? Considere que si es operativamente es rentable la inversión se financiará sin incovenientes. Considere el precio del peaje en 3000 UM.

Respuesta:

De acuerdo a la información del enunciado es razonable plantear el problema en términos de minimización de costos totales de trasporte, es decir, el costo de aquellas personas que viajan en auto y en tren. Así:

$$\underline{\text{Objetivo}} \ : \ \text{Minimizar costos totales}$$

A continuación podemos definir los estados de la naturaleza. Sea:

$$\begin{aligned}
S_1 &= \text{flujo vehicular} \leq 200 \\
S_2 &= 201 \leq \text{flujo vehicular} \leq 400 \\
S_3 &= 401 \leq \text{flujo vehicular} \\
S_4 &= \text{demora} \geq 3 \text{ horas} \\
\bar{S}_4 &= \text{demora} < 3 \text{ horas}
\end{aligned}$$

De los datos del enunciado se conoce:

$$\begin{aligned}
IP(S_4) &= 0{,}8 \\
IP(\bar{S}_4) &= 0{,}2
\end{aligned}$$

De acuerdo a la información disponible, los costos asociados a una demora de más de tres horas (S_4) son de $3000 + (4000 + 6000) + 2000 = 15000$ unidades monetarias. Como el costo del peaje es 3000 UM, un viaje con una demora mayor a 3 horas (S_4) tendrá un costo total de 18000 UM por vehículo.

Similarmente, en el caso que la demora sea menor a 3 horas ($\bar{S}_4$), el costo por vehículo será sólo el de la bencina y el peaje, es decir, 4000+3000=7000 unidades monetarias.

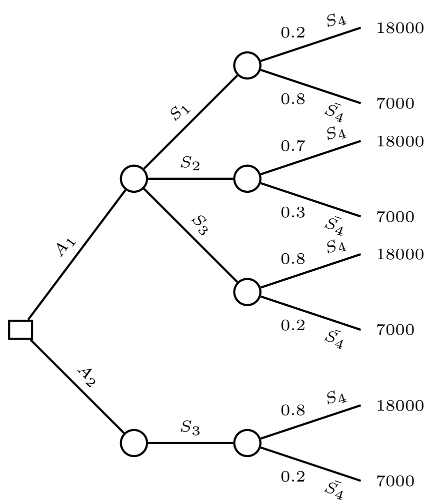
Claramente, los cursos de acción disponibles corresponden a la decisión de construir o no construir el tren rápido:

$$\begin{aligned} A_1 &= \text{construir el tren rápido} \\ A_2 &= \text{no construir el tren rápido} \end{aligned}$$

El impacto en el flujo vehicular debido a la construcción del tren no es conocido y corresponde justamente a la pregunta del problema. Por lo tanto debemos considerar una variable x que represente al flujo en la carretera producto de la construcción del tren. En términos del valor que tome la variable x, se puede plantear las siguientes probabilidades condicionales:

$$\begin{aligned} IP(S_4|x \leq 200) &= IP(S_4|S_1) &= 0{,}2 \\ IP(S_4|201 \leq x \leq 400) &= IP(S_4|S_2) &= 0{,}7 \\ IP(S_4|401 \leq x) &= IP(S_4|S_3) &= 0{,}8 \end{aligned}$$

Luego, podemos construir un árbol de decisión para el problema:



Para calcular los valores esperados hay que emplear la información de que en promedio dos personas van por automóvil y que el pasaje en tren costaría 5000 unidades monetarias. Por lo tanto, el valor esperado del curso de acción A_2 es:

$$E[A_2] = (0{,}8 \times 18000 + 0{,}2 \times 7000)\phi$$

Donde ϕ corresponde al flujo actual, es decir, 1000 vehículos por hora en horario de punta.

Si el impacto del tren fuera tal que el flujo en la carretera sea inferior a 200 vehículos a la hora (S_1), el valor esperado del curso de acción A_1 resulta:

$$E[A_2] = (\phi - x)10000 + (0{,}2 \times 18000 + 0{,}8 \times 7000)x \qquad x \leq 200$$

Similarmente, para los estados de la naturaleza S_2 y S_3 se tiene:

$$E[A_2] = (\phi - x)10000 + (0{,}7 \times 18000 + 0{,}3 \times 7000)x \qquad 201 \leq x \leq 400$$
$$E[A_2] = (\phi - x)10000 + (0{,}8 \times 18000 + 0{,}2 \times 7000)x \qquad 401 \leq x$$

Luego, el valor esperado para el curso de acción A_1 es una función definida por tramos según:

$$E[A_2] = \begin{cases} 10000\phi - 800x & x \leq 200 \\ 10000\phi + 4700x & 201 \leq x \leq 400 \\ 10000\phi + 5800x & 401 \leq x \end{cases}$$

Por simple inspección se observa que el mínimo costo se tiene cuando el flujo en la carretera está por debajo de los 200 vehículos, más específicamente el costo es mínimo para un flujo de 200 vehículos en la carretera, es decir $x = 200$. Además, se verifica que cualquiera sea la circunstancia de flujo en la carreta, la incorporación del tren rápido significa un disminución del costo total.