Fundamentos de Investigación de Operaciones
Modelos de Grafos

2 de junio de 2004

Muchos problemas de optimización puedes ser analizados y resueltos a través de representaciones gráficas. Tal es el caso de los problemas de planificación de proyectos (redes PERT-CPM). A continuación se estudiarán los problemas de Ruta más Corta, Árboles de Mínima Expansión, Flujo Máximo y Flujo de Costo Mínimo.

1. Definiciones

Un **grafo** o **red** está definido por dos conjuntos de símbolos: nodos y arcos. Un **nodo** corresponde a un vértice de un grafo. Un **arco** corresponde a un par ordenado de vértices que representan una posible dirección de desplazamiento a través de un grafo. Por lo tanto, si un grafo posee el arco (i, j), el desplazamiento desde el nodo i al nodo j es factible en el grafo. El punto i es el nodo *inicial*, mientras que el punto j es el nodo *terminal* del arco.

Sea $V = \{1, 2, 3, 4\}$ el conjunto de puntos o vértices de un grafo. Sea $A = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 1)\}$ el conjunto de arcos del grafo. por lo tanto, el conjunto V y A definen el grafo de la Figura 1.1.

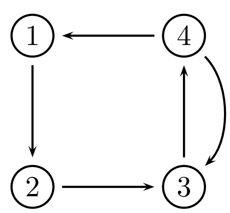

Figura 1.1: Ejemplo de Grafo

Adicionalmente, una secuencia de arcos tales que todo arco tienen exactamente un vértice en común con el arco anterior se denomina **cadena**. Un **camino** es una cadena en la cual el nodo terminal de cada arco es idéntico al nodo inicial del arco siguiente. Por ejemplo, la secuencia $(1, 2) - (2, 3) - (4, 3)$ es una cadena, pero no un camino. La secuencia $(1, 2) - (2, 3) - (3, 4)$ es una cadena y un camino.

2. El Problema de la Ruta Más Corta

En un grafo para este tipo de problema, cada arco debe tener una longitud asociada. Supongamos que se comienza en algún nodo, por ejemplo el nodo 1. El problema de encontrar la distancia mínima entre el nodo 1 y cualquier otro nodo de la red es conocido como el problema de la Ruta Más Corta. Consideremos un ejemplo.

Ejemplo 1 *Supongamos que se envía energía eléctrica desde una planta (nodo* 1*) a una cierta ciudad (nodo* 6*) a través de una serie de subestaciones (nodos* 2 *al* 5*). Las distancias entre las combinaciones factibles se entregan en la Figura 2.1. Determine la forma de enviar la energía de modo de minimizar la distancia a recorrer.*

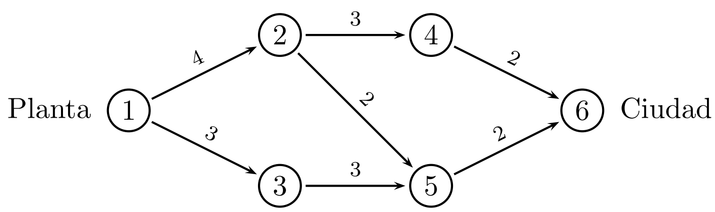

Figura 2.1: Grafo del Ejemplo 1

Si todas las longitudes de los arcos son no negativas, se puede emplear el algoritmo de Dijkstra para resolver el problema de la ruta más corta. Se comienza asignándole una etiqueta permanente $[0, s]$ al nodo 1. El valor 0 indica que la distancia acumulada al nodo es cero, la letra s indica que es el nodo de partida (start). A continuación, a cada nodo i que está conectado al nodo 1 se le agrega una etiqueta temporal $[c_{1i}, 1]$. El valor c_{i1} corresponde a la longitud asociada al arco $1 - i$, el 1 indica el nodo predecesor. Al resto de los nodos de la malla, es decir, aquellos que no están conectados al nodo 1, se les agrega la etiqueta temporal $[M, -]$. La M indica que la distancia acumulada desde el nodo 1 no es conocida y por lo tanto se asume que muy grande, el guión $-$ representa que el nodo predecesor no está identificado. Luego, se busca la menor distancia acumulada y se conecta el nodo respectivo (se encuadra). En este caso, la menor distancia acumulada pertenece al nodo 3, por lo que se encuadra (Figura 2.2).

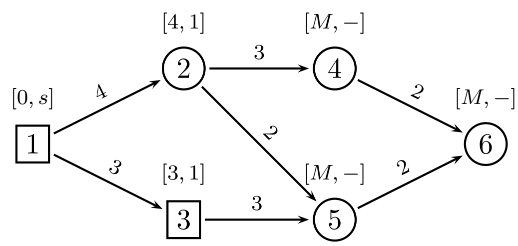

Figura 2.2: Primer Paso - Ejemplo 1

Luego, se busca la menor distancia entre los nodos que es posible conectar a los nodos encuadrados (se recalculan las etiquetas). En este caso se puede acceder al nodo 6 a partir del 3 por lo que se reemplaza su etiqueta por $[6, 3]$. Se selecciona la menor distancia posible de conectar (nodo 2) y se encuadra. Hasta este punto, el grafo queda según se muestra en la Figura 2.3.

A continuación, se busca el camino más corto para los nodos inmediatamente consecutivos a los que ya están conectados, en este caso, los nodos 4 y 5. A cada uno de dichos nodos se asociará una nueva etiqueta de la forma $[d, k]$. El valor d queda definido por:

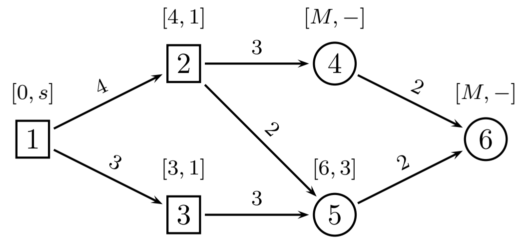

Figura 2.3: Segundo Paso - Ejemplo 1

$$d = \text{mín}\begin{cases}\text{etiqueta actual del nodo } j\\ \text{etiqueta permanente del nodo } i + c_{ij}\end{cases}$$

El nodo antecesor a j se incorpora en su etiqueta como k. Resolviendo, se completa la Figura 2.4.

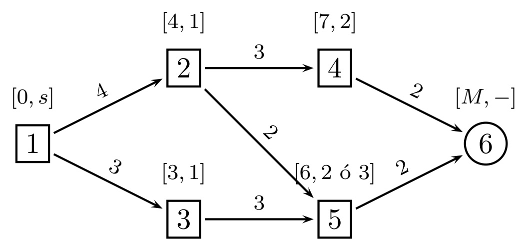

Figura 2.4: Tercer Paso - Ejemplo 1

Finalmente, se resuelve el nodo restante y se completa el problema (Figura 2.5).

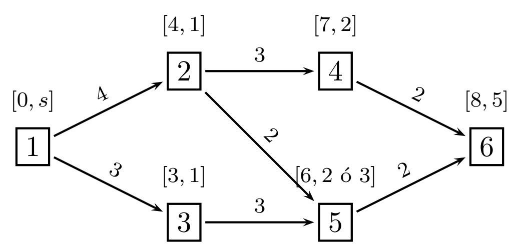

Figura 2.5: Grafo final - Ejemplo 1

La solución al problema anterior es muy simple ya que los arcos poseen un único sentido. No obstante, en general, los arcos pueden ser recorridos en ambos sentidos, lo que puede aumentar significativamente el número de combinaciones. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 2 *Determine la distancia mínima desde el nodo* 1 *a cada nodo de la malla (Figura 2.6).*

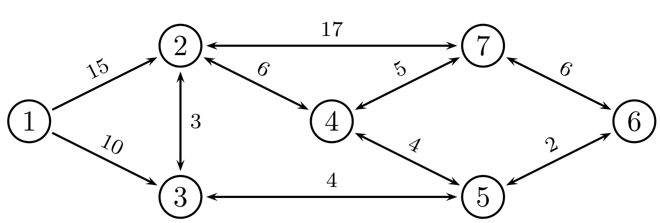

Figura 2.6: Grafo del Ejemplo 2

Si aplicamos el método a este ejemplo se debe resolver primero los nodos 2 y 3, inmediatos al nodo 1 (Figura 2.7).

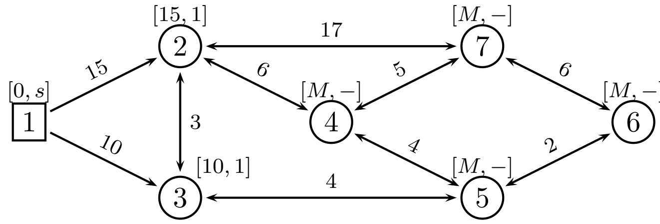

Figura 2.7: Paso 1 - Ejemplo 2

A continuación, podemos marcar como conectado al nodo 3, pues la mínima distancia al nodo 1 es la etiqueta actual. Volvemos a calcular la etiqueta del nodo 2 y cambiamos también la etiqueta del nodo 5 (Figura 2.8).

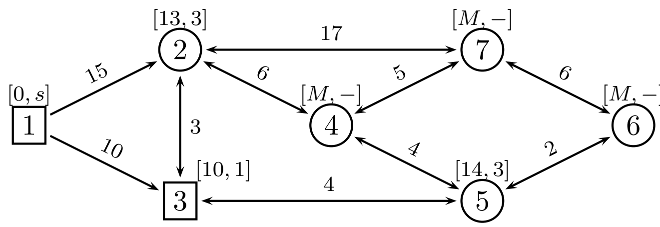

Figura 2.8: Paso 2 - Ejemplo 2

Luego, podemos marcar como permanente la etiqueta del nodo 2 y calcular las etiquetas de los nodos 4 y 5 (Figura 2.9).

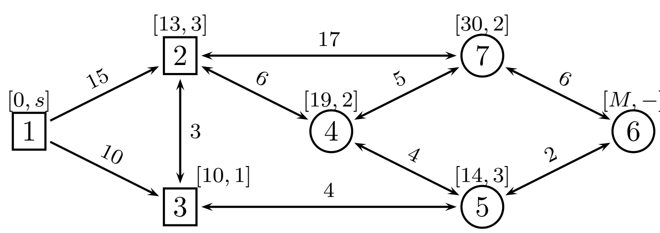

Figura 2.9: Paso 3 - Ejemplo 2

A continuación, se puede marcar como definitiva la etiqueta del nodo 5 y recalcular las etiquetas de los nodos 4 y 6 (Figura 2.10).

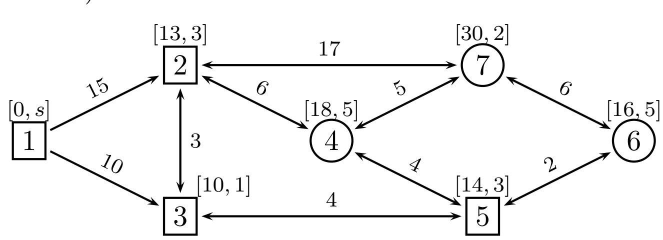

Figura 2.10: Paso 4 - Ejemplo 2

De acuerdo a las distancias calculadas, podemos marcar como definitiva la etiqueta del nodo 6 y recalcular la etiqueta del nodo 7 (Figura 2.11).

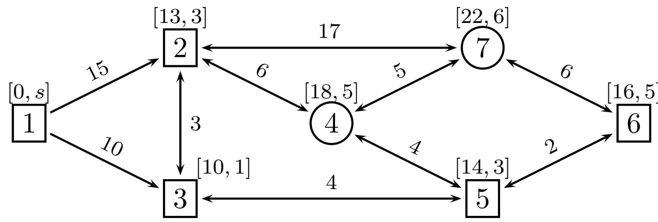

Figura 2.11: Paso 5 - Ejemplo 2

Luego, la mínima distancia está asociada al nodo 4. Marcamos como asignado dicho nodo y se analiza si conviene cambiar la etiqueta del nodo 7 (Figura 2.12). En este caso, la distancia al último nodo conectado es mayor a la etiqueta temporal, por lo que no se modifica.

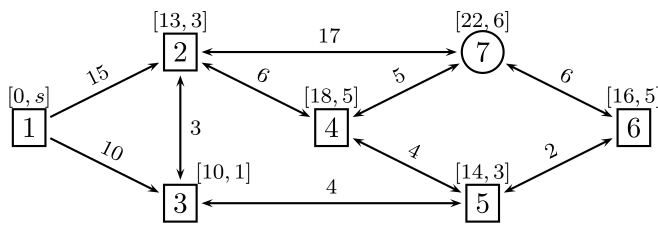

Figura 2.12: Grafo Final - Ejemplo 2

De acuerdo al grafo obtenido, los caminos desde el nodo 1 se resumen en el Cuadro 2.1.

Cuadro 2.1: Resumen - Ejemplo 2

Nodo	Ruta más corta desde el nodo 1	Distancia
2	$1-3-2$	13
3	$1-3$	10
4	$1-3-5-4$	18
5	$1-3-5$	14
6	$1-3-5-6$	16
7	$1-3-5-6-7$	22

Si bien los dos ejemplos revisados corresponden evidentemente a problemas de tipo ruta más corta, en general existen múltiples situaciones que pueden ser planteadas como un problema de este tipo para luego obtener una solución óptima gráficamente.

Ejemplo 3 *Se acaba de adquirir (tiempo 0) un vehículo nuevo por un valor de US$12000. El costo de mantener un automóvil durante un año depende de la antigüedad del vehículo a comienzo del año (Cuadro 2.2). Para evitar incurrir en elevados costos de mantención, es posible vender el vehículo usado y adquirir uno nuevo. El precio de venta del automóvil usado depende de los años de uso que tenga (Cuadro 2.3). Para simplificar los cálculos, se puede asumir que el costo de un vehículo nuevo es siempre US$12000, independiente del año de compra. El objetivo es determinar el programa de renovación del automóvil de forma de minimizar los costos netos durante los próximos cinco años, considerando que al final del período se vende el vehículo. Formule y resuelva el modelo como un problema de ruta más corta.*

Cuadro 2.2: Costos de Mantención - Ejemplo 3

Años de antigüedad	Costo anual de mantención (US$)
0	2000
1	4000
2	5000
3	9000
4	12000

Cuadro 2.3: Precio de Venta - Ejemplo 3

Años de antigüedad	Precio de Venta (US$)
0	7000
1	6000
2	2000
3	1000
4	0

Un posible planteo podría ser a través de un grafo de seis nodos. Cada nodo i ($i = 1 \ldots 6$) representa el inicio del año i. Para todo $i < j$, el arco (i, j) corresponde a la compra de un automóvil nuevo al inicio del año i y su venta al inicio del año j. Sea c_{ij} la longitud del arco (i, j) definida como el costo neto de comprar, mantener y vender el vehículo desde el inicio del año i al inicio del año j. Luego:

$$\begin{aligned} c_{ij} \quad = \quad & \text{costos de mantención durante los años } i, i+1, \ldots, j \\ & +\text{costo de compra al inicio del año } i \\ & -\text{precio de venta al inicio del año } j \end{aligned}$$

Calculando los valores de los c_{ij} para las combinaciones posibles se obtiene:

$$
\begin{aligned}
c_{12} &= 2+12-7 &&= 7\\
c_{13} &= 2+4+12-6 &&= 12\\
c_{14} &= 2+4+5+12-2 &&= 21\\
c_{15} &= 2+4+5+9+12-1 &&= 31\\
c_{16} &= 2+4+5+9+12+12-0 &&= 44\\
c_{23} &= 2+12-7 &&= 7\\
c_{24} &= 2+4+12-6 &&= 12\\
c_{25} &= 2+4+5+12-2 &&= 21\\
c_{26} &= 2+4+5+9+12-1 &&= 31\\
c_{34} &= 2+12-7 &&= 7\\
c_{35} &= 2+4+12-6 &&= 12\\
c_{36} &= 2+4+5+12-2 &&= 21\\
c_{45} &= 2+12-7 &&= 7\\
c_{46} &= 2+4+12-6 &&= 12\\
c_{56} &= 2+12-7 &&= 7
\end{aligned}
$$

De acuerdo al planteo anterior la longitud de cualquier camino desde el nodo 1 al nodo 6 corresponde al costo neto durante los próximos 5 años correspondientes a una estrategia particular de compra, mantención y venta del vehículo. A continuación se puede construir el grafo del problema (Figura 2.13).

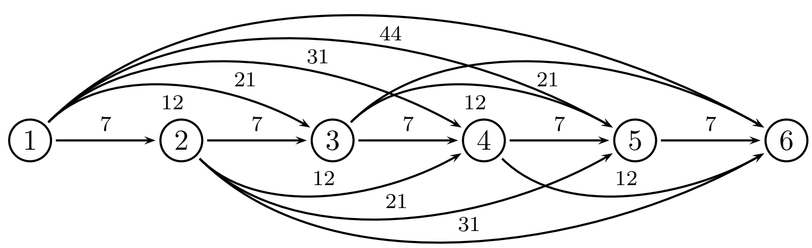

Figura 2.13: Grafo - Ejemplo 3

Por simplicidad, representaremos sólo las etiquetas de los nodos del grafo. Calculando las etiquetas iniciales se tiene:

$$[0, s] \quad [7, 1] \quad [12, 1] \quad [21, 1] \quad [31, 1] \quad [44, 1]$$

A continuación definimos como conectado el nodo 2 y se recalculan las etiquetas. Sólo disminuye la distancia a los nodos 4, 5 y 6.

$$[0, s] \quad [7, 1] \quad [12, 1] \quad [21, 1] \quad [28, 2] \quad [38, 2]$$

Se define como permanente la etiqueta del nodo 3 y se recalculan las etiquetas temporales. En este caso, disminuyen las distancias a los tres nodos restantes.

$$[0, s] \quad [7, 1] \quad [12, 1] \quad [19, 2 \text{ ó } 3] \quad [24, 3] \quad [33, 3]$$

Se marca como asignado el nodo 4 y se recalculan las etiquetas. La del nodo 4 no mejora, pero sí la del nodo 6.

$$[0, s] \quad [7, 1] \quad [12, 1] \quad [19, 2 \text{ ó } 3] \quad [24, 3] \quad [31, 4]$$

Finalmente, sólo resta chequear la asignación del nodo 5 y recalcular la asignación del nodo 6.

$$[0, s] \quad [7, 1] \quad [12, 1] \quad [19, 2 \text{ ó } 3] \quad [24, 3] \quad [31, 4 \text{ ó } 5]$$

Por lo tanto, uno de los caminos más cortos para llegar del nodo 1 al 6 es: $1 - 3 - 5 - 6$, con un costo neto total asociado de US$31000. Los otros caminos alternativos se obtienen directamente de las etiquetas de los nodos.

3. El Problema del Árbol de Expansión Mínima

Suponga que cada arco (i, j) de una red tiene asociado una cierta longitud. Por otro lado, cada arco (i, j) representa un vía que conecta el nodo i con el nodo j (en ambos sentidos). En muchas aplicaciones se puede desear determinar el conjunto de arcos de la red a través de los cuales se conectan todos los nodos de red de forma de minimizar la longitud total de los arcos. Claramente, un conjunto de arcos puede no contener un *loop* (camino cerrado).

En una red de n nodos, un **árbol** es un grupo de $n - 1$ arcos que conecta todos los nodos de la red y que puede contener caminos abiertos (no loop). Luego, el árbol de expansión mínima, es el árbol cuyos arcos tienen la menor longitud total posible.

Para resolver el problema del árbol de expansión mínima se pueden seguir los siguientes pasos:

Paso 1 *Construir una tabla representando en filas y columnas los nodos de la red. Cada celda $i - j$ se completa con la distancia entre los nodos i y j. Si la conexión no es posible, se agrega una M. Se agrega una columna auxiliar para indicar los nodos ya conectados.*

Paso 2 *Se inicia en cualquier nodo i. Se indica como conectado en la columna auxiliar. Se tarja la columna del nodo i y se busca el menor coeficiente no tarjado de la fila i, se identifica dicho nodo como j.*

Paso 3 *Se marca como conectado el nodo j en la columna auxiliar. Se tarja la columna j. Se busca el menor coeficiente no tarjado entre las filas de los nodos ya conectados y se marca el nuevo nodo. Se repite el paso hasta completar la conexión de todos los nodos.*

Veamos un ejemplo de aplicación.

Ejemplo 4 *Una pequeña escuela dispone de 5 computadores. La distancia entre cada equipo se muestra en la Figura 3.1. ¿ Cuál es la longitud mínima de cable requerida para conectar todos los computadores ?*

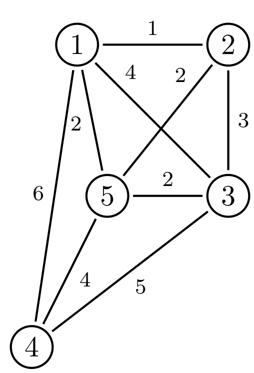

Figura 3.1: Grafo - Ejemplo 4

En primer lugar, se construye la tabla para la resolución de la malla (Cuadro 3.1)

Cuadro 3.1: Tableau Inicial - Ejemplo 4

Conectado		1	2	3	4	5
-	1	0	1	4	6	2
-	2	1	0	3	M	2
-	3	4	3	0	5	2
-	4	6	M	5	0	4
-	5	2	2	2	4	0

Cuadro 3.2: Primera Iteración - Ejemplo 4

Conectado		1	2	3	4	5
√	1	0	1	4	6	2
-	2	1	0	3	M	2
-	3	4	3	0	5	2
-	4	6	M	5	0	4
-	5	2	2	2	4	0

Arbitrariamente conectamos el nodo 1. En la primera fila, el menor costo es al nodo 2 y se selecciona (Cuadro 3.2).

Luego, se marca como conectado el nodo 2. Se selecciona el menor valor no tarjado entre la primera y segunda fila. En este caso corresponde al nodo 5 y se marca en cualquiera de los dos filas pues tienen la misma distancia (Cuadro 3.3).

Cuadro 3.3: Segunda Iteración - Ejemplo 4

Conectado		1	2	3	4	5
√	1	0	1	4	6	2
√	2	1	0	3	M	2
-	3	4	3	0	5	2
-	4	6	M	5	0	4
-	5	2	2	2	4	0

A continuación, se marca como conectado el nodo 5 y se tarja su columna. Luego, se busca el menor costo no tarjado entre las filas conectadas. En este caso corresponde al nodo 3 (Cuadro 3.4).

Finalmente, se marca como conectado el nodo 3 y se busca la asignación a la única columna restante (Cuadro 3.5).

Leyendo el tableau, la asignación queda (Figura 3.2):

Cuadro 3.4: Tercera Iteración - Ejemplo 4

Conectado		~~1~~	~~2~~	3	4	~~5~~
√	1	~~0~~	~~1~~	4	6	~~2~~
√	2	~~1~~	~~0~~	3	M	~~2~~
-	3	~~4~~	~~3~~	0	5	~~2~~
-	4	~~6~~	~~M~~	5	0	~~4~~
√	5	~~2~~	~~2~~	2	4	~~0~~

Cuadro 3.5: Cuarta Iteración - Ejemplo 4

Conectado		~~1~~	~~2~~	~~3~~	4	~~5~~
√	1	~~0~~	~~1~~	~~4~~	6	~~2~~
√	2	~~1~~	~~0~~	~~3~~	M	~~2~~
√	3	~~4~~	~~3~~	~~0~~	5	~~2~~
-	4	~~6~~	~~M~~	~~5~~	0	~~4~~
√	5	~~2~~	~~2~~	~~2~~	4	~~0~~

$$\begin{aligned} 1 \leftrightarrow 2 &= 1 \\ 2 \leftrightarrow 5 &= 2 \\ 5 \leftrightarrow 3 &= 2 \\ 5 \leftrightarrow 4 &= \underline{4} \\ & \quad 9 \end{aligned}$$

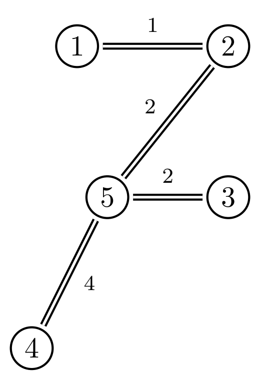

Figura 3.2: Árbol de Expansión Mínima - Ejemplo 4

Ejemplo 5 *Determinar el árbol de expansión mínima de la malla de la Figura 3.3.*

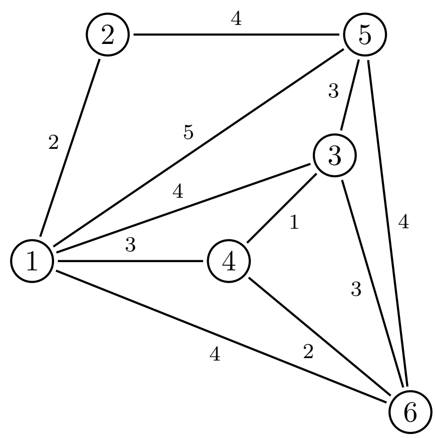

Figura 3.3: Grafo - Ejemplo 5

Resolviendo se completa el Cuadro 3.6, con una longitud total de 11.

Cuadro 3.6: Tableau Final - Ejemplo 5

Conectado		1	2	3	4	5	6
√	1	0	2	4	3	5	4
√	2	2	0	M	M	4	M
√	3	4	M	0	1	3	3
√	4	3	M	1	0	M	2
√	5	5	4	3	M	0	4
√	6	4	M	3	2	4	0

4. El Problema del Flujo Máximo

Muchas situaciones pueden ser modeladas como un problema de red, en algunos casos cada arco puede tener una cierta capacidad que limite la cantidad de algún producto que pueda ser enviado a través de cada arco. En tal caso, es importante determinar la cantidad máxima que puede ser transportada desde un punto inicial **(fuente)** a un punto terminal **(pozo, sumidero o destino)**. Este tipo de problema se denomina problema de Flujo Máximo.

Ejemplo 6 *Una refinería desea enviar la máxima cantidad posible de petróleo (por hora) a través de un sistema de tuberías desde el nodo s_o al nodo s_i de la Figura 4.1. El petróleo debe pasar a través de una o varias estaciones (1, 2 ó 3). Los arcos representan tuberías de distintos diámetros. El número máximo de barriles de petróleo (millones de barriles por hora) que pueden ser bombeados a través de cada arco se indican en la Figura 4.1. Formule un modelo de LP que determine el número máximo de barriles que pueden ser enviados a través del sistema de tuberías.*

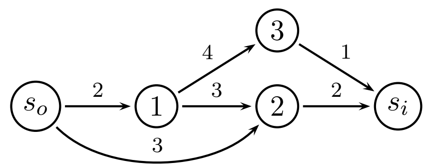

Figura 4.1: Grafo - Ejemplo 6

Como s_o es un nodo fuente, de él sólo puede salir flujo. Como s_i es un destino, sólo puede recibir flujo. Para formular el modelo emplearemos las variables:

$$x_{ij} = \text{cantidad de barriles enviadas a través del arco } (i, j)$$

El flujo en cada arco debe satisfacer la restricción:

$$0 \leq \text{flujo por el arco} \leq \text{capacidad del arco}$$

En cada nodo se debe satisfacer que:

$$\text{flujo entrante al nodo } i = \text{flujo saliente del nodo } i$$

Asumiendo que es x_0 el flujo a través de la red, la función objetivo será entonces maximizar x_0. Luego, el modelo completo queda:

$$
\begin{array}{llcll}
\text{Max} & z = x_0 & & & \\
& & & & \\
\text{st} & x_{s_o,1} & \leq & 2 & \text{(Restricciones de capacidad de los arcos)} \\
& x_{s_o,2} & \leq & 3 & \\
& x_{12} & \leq & 3 & \\
& x_{2,s_i} & \leq & 2 & \\
& x_{13} & \leq & 4 & \\
& x_{3,s_i} & \leq & 1 & \\
& x_0 & = & x_{s_o,1} + x_{s_o,2} & \text{(Restricción del nodo } s_o\text{)} \\
& x_{s_o,1} & = & x_{12} + x_{13} & \text{(Restricción del nodo 1)} \\
& x_{s_o,2} + x_{12} & = & x_{2,s_i} & \text{(Restricción del nodo 2)} \\
& x_{13} & = & x_{3,s_i} & \text{(Restricción del nodo 3)} \\
& x_{3,s_i} + x_{2,s_i} & = & x_0 & \text{(Restricción del nodo } s_i\text{)} \\
& x_{ij} & \geq & 0 &
\end{array}
$$

Una solución óptima para el problema de LP es $z = 3$, $x_{s_o,1} = 2$, $x_{13} = 1$, $x_{12} = 1$, $x_{s_o,2} = 1$, $x_{3,s_i} = 1$, $x_{2,s_i} = 2$ y $x_0 = 3$.

Para comprender de mejor forma el funcionamiento del algoritmo gráfico para determinar el flujo máximo consideremos un camino en la malla que vaya desde el nodo s_o al nodo s_i, por ejemplo el camino $s_o - 1 - 2 - s_i$. Se dice que la cantidad de flujo a lo largo de dicho recorrido es **factible** si:

1. No se excede la capacidad de ningún arco del camino.
2. Los nodos intermedios satisfacen que el flujo entrante a cada nodo sea igual al saliente.

De las condiciones anteriores se desprende que la capacidad máxima que puede fluir desde la fuente al destino a través de un camino es igual o menor a las capacidades de los arcos de dicho camino. Por ejemplo, en el camino $s_o - 1 - 2 - s_i$, el arco de mínima capacidad es el $(s_o, 1)$ o el $(2, s_i)$, por lo tanto la capacidad máxima del camino es 2.

Para aplicar el algoritmo gráfico, es más conveniente emplear la notación de la Figura 4.2. En lugar de emplear flechas en los arcos, la ubicación de los número determinan el sentido del flujo.

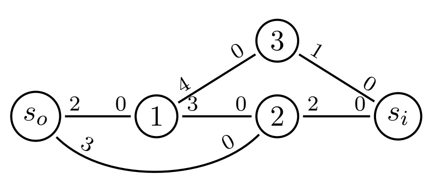

Figura 4.2: Grafo - Ejemplo 6

El algoritmo de flujo máximo considera sucesivamente varios flujos de prueba. El algoritmo revisará los flujos de prueba con el objeto de incrementar el flujo total a lo largo de la red. Para ello, emplearemos las siguientes reglas en cada arco:

1. Se reduce la capacidad en la dirección del flujo asignado en la cantidad del flujo.
2. Se aumenta la capacidad en sentido opuesto en la cantidad del flujo.

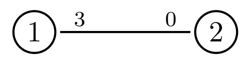

Figura 4.3: Arco $(1, 2)$ - Ejemplo 6

A modo de ejemplo, consideremos el arco $(1, 2)$ de la malla (Figura 4.3). Este arco posee una capacidad de 3 en el sentido hacia la derecha, y 0 en el sentido inverso.

De acuerdo a las reglas anterior, al asignar 2 unidades de flujo a este arco se debe actualizar la capacidad del arco (Figura 4.4). En esta situación, se ha disminuido en 2 unidades la capacidad de flujo del arco en la dirección $1 \rightarrow 2$ y se ha aumentado la capacidad en 2 unidades en la dirección $2 \rightarrow 1$. La capacidad en la dirección $2 \rightarrow 1$ es ficticia pues cualquier flujo futuro que se asigne en la dirección $2 \rightarrow 1$ simplemente cancelaría parte del flujo $1 \rightarrow 2$ ya asignado.

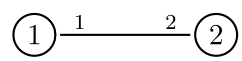

Figura 4.4: Arco $(1, 2)$ - Ejemplo 6

Luego, se pueden definir los pasos de aplicación del algoritmo gráfico:

Paso 1 *Encontrar cualquier camino de la fuente al destino que tenga capacidad de flujo positiva. Es decir, considerando todos los arcos del recorrido, la mínima de las capacidades en la dirección del flujo (fuente $\rightarrow$ destino) debe ser positiva. Si no existen dichos caminos, se ha encontrado el óptimo.*

Paso 2 *Sea c_{min} la capacidad mínima de flujo entre todos los arcos seleccionados en el Paso 1. Se aumenta el flujo existente a través de la red al enviar un flujo adicional de c_{min} sobre este camino.*

Paso 3 *Por este mismo camino se debe disminuir las capacidades en la dirección del flujo en cada arco en c_{min}. Además, se debe aumentar la capacidad en la dirección opuesta en c_{min} para todos los arcos del camino.*

A continuación podemos aplicar el algoritmo al Ejemplo 6. Si se escoge arbitrariamente el camino $s_o - 1 - 2 - s_i$ el valor de c_{min} es 2. Luego, incorporamos dos unidades de flujo y actualizamos los arcos de la red (Figura 4.5).

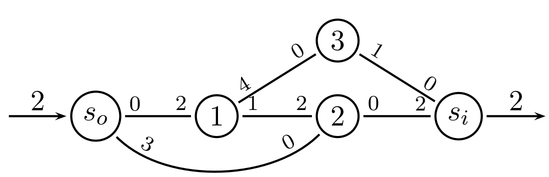

Figura 4.5: Primera Iteración - Ejemplo 6

Buscando un camino con capacidad de flujo positiva, sólo se encuentra la secuencia $s_o - 2 - 1 - 3 - s_i$. En este caso el valor de c_{min} es 1. Luego, incorporamos una unidad de flujo y actualizamos los arcos de la red (Figura 4.6).

No existen otros caminos con capacidad positiva, por lo que se ha encontrado el óptimo. Luego, el flujo máximo es de 3 millones de barriles por hora. El flujo neto en cada arco se obtiene de la diferencia

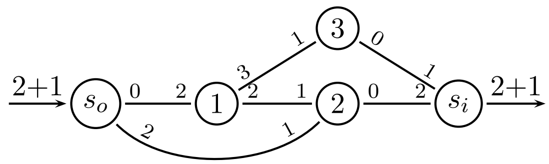

Figura 4.6: Segunda Iteración - Ejemplo 6

entre la capacidad inicial y la capacidad final en cada arco (Figura 4.7).

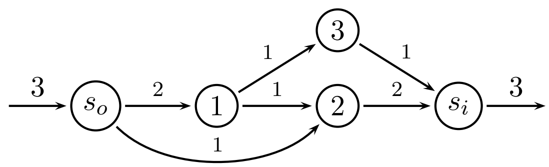

Figura 4.7: Diagrama de Flujo Máximo - Ejemplo 6

Uno de los resultados más importantes de la teoría de redes se relaciona con el problema de flujo máximo. El resultado, llamado **teorema del flujo máximo - corte mínimo**. Un **corte** es una partición del conjunto de nodos en dos clases ajenas, sean C_1 y C_n. La fuente está en C_1 y el destino en C_n. Considere todos los arcos que conectan directamente un nodo de C_1 a un nodo de C_n. La suma de las capacidades de esos arcos, en la dirección $C_1 - C_n$ se llama **capacidad de corte**.

El Cuadro 4.1 muestra los distintos cortes posibles para el Ejemplo 6 y su respectiva capacidad.

Cuadro 4.1: Cortes y sus capacidades - Ejemplo 6

C_1	C_n	Capacidad
s_o	$1, 2, 3, s_i$	$2 + 3 = 5$
$s_o, 1$	$2, 3, s_i$	$4 + 3 + 3 = 10$
$s_o, 1, 2$	$3, s_i$	$4 + 2 = 5$
$s_o, 1, 3$	$2, s_i$	$1 + 3 + 3 = 7$
$s_o, 1, 2, 3$	s_i	$1 + 2 = 3$

El Cuadro 4.1 también permite enunciar el Teorema del flujo máximo y corte mínimo:

Teorema 1 *El flujo máximo de cualquier red es igual a la capacidad del corte mínimo.*

Ejemplo 7 *Determinar el flujo máximo en la red (Figura 4.8).*

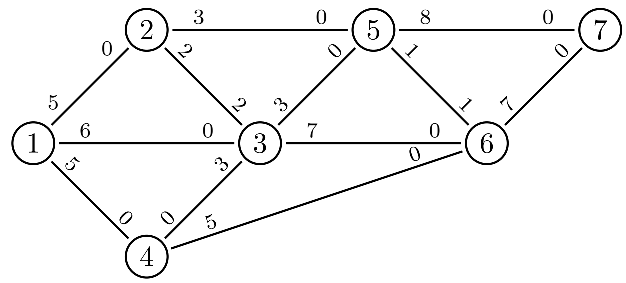

Figura 4.8: Grafo - Ejemplo 7

Aplicando el método gráfico descrito se obtiene un flujo máximo de 14 unidades (Figura 4.9). Se puede verificar la solución mediante el teorema de flujo máximo y corte mínimo.

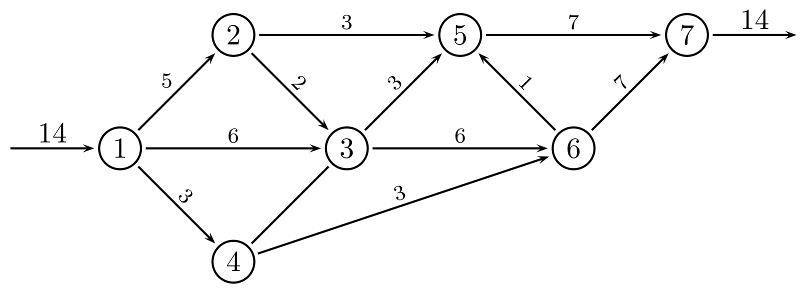

Figura 4.9: Diagrama de Flujo Máximo - Ejemplo 7

5. Problema del Flujo de Costo Mínimo

El problema de transporte, asignación, transbordo, ruta más corta, flujo máximo y CPM corresponden a casos particulares del problema de Flujo de Costo Mínimo (MCNFP). Cualquier MCNFP puede ser resuelto a través de una generalización del Simplex de transporte llamado el **Simplex de Redes**.

Para definir un MCNFP considerremos:

$$
\begin{aligned}
x_{ij} &= \text{número de unidades de flujo enviadas desde el nodo } i \text{ al } j \text{ por el arco } (i,j)\\
b_i &= \text{suministro neto de nodo } i \text{ (entrante o saliente)}\\
c_{ij} &= \text{costo de transportar una unidad de flujo desde el nodo } i \text{ al } j \text{ por el arco } (i,j)\\
L_{ij} &= \text{cota inferior para el flujo a través del arco } (i,j) \text{ (en general } L_{ij}=0)\\
U_{ij} &= \text{cota superior para el flujo a través del arco } (i,j)
\end{aligned}
$$

Luego, el modelo de LP puede ser escrito como:

$$
\begin{array}{lll}
\text{Min} & z = \sum_{\forall\,(i,j)} c_{ij}x_{ij} & \\
 & & \\
\text{st} & \sum_j x_{ij} - \sum_k x_{ki} \quad = \quad b_i & \text{(Para cada nodo } i \text{ en la red)}\\
 & L_{ij} \le x_{ij} \le U_{ij} & \text{(Para cada arco en la red)}
\end{array}
$$

El primer grupo de restricciones tiene que ver con el balance del flujo en cada nodo. El segundo grupo de restricciones garantiza que el flujo en cada arco esté dentro de la capacidad admisible.

Para ilustrar que el problema de transporte es un caso particular de un MCNFP consideremos el problema de transporte definido en el Cuadro 5.1. Los nodos 1 y 2 son puntos de oferta, mientras que los nodos 3 y 4 son puntos de demanda. Luego: $b_1 = 4$, $b_2 = 5$, $b_3 = -6$ y $b_4 = -3$. La malla correspondiente al MCNFP asociado se ilustra en la Figura 5.1.

Cuadro 5.1: Problema de Transporte como MCNFP

1	2	4 (Nodo 1)
3	4	5 (Nodo 2)
6 (Nodo 3)	3 (Nodo 4)	

Por otro lado, podemos construir el modelo de programación lineal asociado al problema de transporte:

$$
\begin{array}{llll}
\text{Min} & z = x_{12} + 2x_{14} + 3x_{23} + 4x_{24} & & \\
 & & & \\
\text{st} & x_{13} + x_{14} & = \ 4 & \text{(Nodo 1)}\\
 & x_{23} + x_{24} & = \ 5 & \text{(Nodo 2)}\\
 & -x_{13} - x_{23} & = \ -6 & \text{(Nodo 3)}\\
 & -x_{14} - x_{24} & = \ -3 & \text{(Nodo 4)}\\
 & x_{ij} & \ge \ 0 &
\end{array}
$$

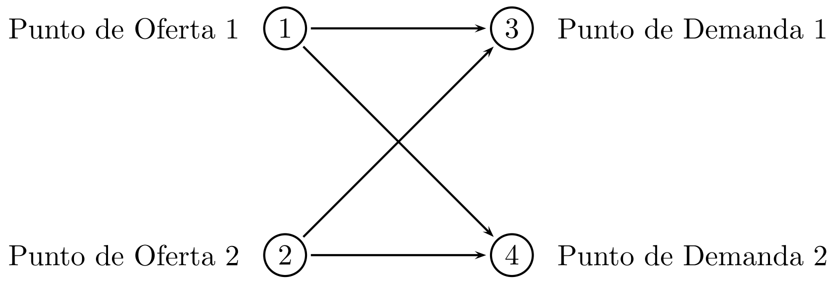

Figura 5.1: Diagrama de Flujo Máximo - Ejemplo 7

Las dos primeras restricciones son las restricciones de oferta, la tercera y la cuarta son las restricciones de demanda (multiplicadas por -1). Como el problema de transporte no tiene asociada una capacidad a cada arco, las restricciones de balance de flujo en cada nodo son las únicas necesarias. Si el problema no hubiera estado balanceado no hubiera sido posible formular el problema como un MCNFP. Por ejemplo, si la oferta total fuera mayor a la demanda total, no se podría determinar con certeza el flujo entrante a cada nodo de oferta. En este caso, para formular un problema de transporte o transbordo no balanceado, se debe agregar a la malla del MCNFP nodos artificiales.

Siguiendo la misma lógica anterior, se puede verificar que los problemas de asignación, flujo máximo, ruta más corta y CPM son casos particulares del problema de flujo de costo mínimo. La resolución general de un MCNFP puede llevarse a cabo a través del Método Simplex para Redes que no será estudiado en detalle en esta oportunidad.