Fundamentos de Investigación de Operaciones
Teoría de Inventarios

1 de mayo de 2004

1. Introducción

El costo de mantener un cierto número de unidades en inventario puede ser importante para una empresa. El objetivo de la Teoría de Inventarios es establecer técnicas para minimizar los costos asociados a un esquema de inventario para satisfacer una demanda.

1.1. Costos involucrados en un modelo de inventario

Los costos más frecuentes asociados un inventario son los siguientes:

- **Costo de ordenar o de producción**
  Muchos gastos asociados a efectuar una orden por cierto producto, o bien a producirlo internamente no necesariamente dependen del tamaño de la orden o del tamaño de la partida producida. Por ejemplo, los costos involucrados en el envío de un fax en el caso de órdenes , o bien el costo de encendido de maquinaria en el caso de producción propia.

- **Costo unitario de compra**
  Corresponde al costo variable unitario involucrado en la compra de artículos a algún proveedor. Normalmente el costo de compra incluye los costos de materiales, mano de obra, maquinaria y utilidades del proveedor. Eventualmente, puede incluir también los costos de envío.

- **Costo de mantener unidades en inventario**
  Involucra los gastos en los que se incurre al mantener una unidad en inventario un determinado período de tiempo. Luego, éste tipo de costo debe ir necesariamente ligado a un intervalo de tiempo, por ejemplo costo anual, semestral o diario de mantener una unidad en inventario.
  El valor del costo de mantener unidades en inventario depende en general de los costos de almacenamiento, impuestos, seguridad, financieros, asociados a la devaluación de los artículos almacenados o bien su obsolescencia. Sin embargo, la mayor componente del costo de mantener unidades en inventario está ligada al costo de oportunidad asociado a mantener un capital detenido por concepto de inventario.

- **Costos por escasez o mantención de órdenes pendientes**
  Cuando la demanda de un comprador no puede ser satisfecha se habla de un *stockout*. En el caso que el comprador acepte recibir sus artículos fuera de plazo se habla de *órdenes pendientes*. Si se acepta el hecho de mantener órdenes pendientes, se habla de *escasez planificada*.
  Si el comprador no acepta los productos fuera de plazo, se habla *pérdidas de ventas*. En la práctica, la situación normalmente está entre los dos extremos mencionados en cuyo caso ambas situaciones pueden entregar buenos indicadores para definir la política a seguir.
  Existen muchos costos asociados a las órdenes pendientes, por ejemplo el costo de adquisición

de unidades para satisfacer las órdenes pendientes podría ser mayor, además el hecho de no satisfacer una demanda a tiempo puede repercutir en la pérdida de clientes para el futuro y en el desprestigio. Además, la satisfacción de órdenes pendientes puede llevar a incurrir en grandes gastos en trabajo extraordinario. Luego, el costo de satisfacción de órdenes pendientes en general es muy superior a los costos de ordenar, de compra o producción o de mantención de inventario.

1.2. Supuestos en modelos de inventario

En términos generales, los principales supuestos para desarrollar modelos de inventario son:

- **Órdenes repetitivas**
  La decisión de ordenar es repetitiva en el sentido que es repetida en forma regular. Por ejemplo, si el inventario de un artículo es muy pequeño se efectúa una orden, luego que el inventario vuelve a bajar se vuelve a emitir una orden, etc. Esta hipótesis no es adecuada en el caso de productos estacionales, como por ejemplo trajes de baño. En tal caso, se emitirán algunas órdenes durante primavera y verano y no se volverá a ordenar hasta el año siguiente.

- **Demanda constante**
  Se asume que la demanda es conocida y ocurre a tasa constante. Por lo tanto, si la demanda anual es D, la demanda diaria será de $d = \frac{D}{365}$, suponiendo que se vende todos los días del año.

- **Lead Time constante**
  Por *lead time* (L) entenderemos el tiempo transcurrido entre la emisión de una orden y la llegada de los artículos solicitados.

- **Órdenes continuas**
  Se supondrá que se puede efectuar una orden en cualquier instante. En estos casos se habla de modelos de inventario con *revisión continua*. Si la revisión del inventario se hace a intervalos regulares se habla de modelos con *revisión periódica*. Tal es el caso de situaciones en la que sólo se puede efectuar órdenes cada cierto período de tiempo.

Si bien la consideración de demanda constante y lead time constante pueden ser altamente irreales y restrictivas, existen muchas situaciones en las que estas consideraciones permiten obtener buenas aproximaciones respecto de la situación real.

2. Modelos Determinísticos

2.1. Modelo del Lote Económico (EOQ)

Para formular el Economic Order Quantity Model o modelo EOQ, se requieren ciertos supuestos:

1. La demanda es determinística y ocurre a tasa constante.
2. Si una orden de cualquier tamaño Q es efectuada, se incurre en un costo de ordenar c_0.
3. El lead time para cada orden es nulo.
4. No se acepta mantener órdenes pendientes.
5. El costo de mantener una unidad en inventario durante año es c_h.

Sea D el número de unidades demandada durante un año.

El costo c_o es adicional al costo $c_p \times Q$ de comprar o producir Q unidades. Nótese que el costo c_o de comprar o producir cada unidad es independiente del tamaño de la orden, lo que excluye la posibilidad de descuento según el tamaño de la orden (ver sección 2.2).

El supuesto 3 impone que la orden llega inmediatamente una vez que es emitida. Luego ser verá que esta condición puede ser relajada.

Como se asume que las órdenes llegan instantáneamente, no se efectuará ninguna orden a menos que el nivel de inventario I sea nulo para no incurrir en un costo de inventario innecesario. El objetivo es evitar que ocurra un stockout. Supondremos que la cantidad Q ordenada cada vez que se efectúa una orden (cuando $I = 0$) es constante.

Para determinar el valor óptimo Q^* que minimiza los costos de inventario totales $CT(Q)$, se plantea:

$$CT(Q) = \text{costo de ordenar} + \text{costo de compra} + \text{costo de mantención de inventario} \tag{2.1}$$

Si se orden Q unidades cada vez y la demanda anual es D, entonces el número de órdenes por año:

$$\frac{\text{costo de ordenar}}{\text{año}} = \left(\frac{\text{costo de ordenar}}{\text{orden}}\right)\left(\frac{\text{órdenes}}{\text{año}}\right) = c_0\frac{D}{Q} \tag{2.2}$$

Para cualquier valor de Q, el costo unitario de compra es c_p. Debido a que la demanda anual D es independiente del tamaño de la orden, el costo anual de compra queda:

$$\frac{\text{costo de compra}}{\text{año}} = \left(\frac{\text{costo de compra}}{\text{unidad}}\right)\left(\frac{\text{unidades compradas}}{\text{año}}\right) = c_pD \tag{2.3}$$

Para calcular el costo de mantener unidades en inventario, supondremos que el nivel de inventario $I(t)$ no es constante y varía en el tiempo. Si durante un intervalo de tiempo T el nivel medio de inventario es $\bar{I}$, el costo de almacenaje del período sería:

$$\text{costo de mantener inventario durante } T = c_h\bar{I}T \tag{2.4}$$

De acuerdo a ello, los dos gráficos de la figura 2.1 representan el mismo costo de mantención de inventario. En la figura (a) el costo de mantención de inventario corresponde a $0{,}5 \times (1 + 2)c_h$. En la

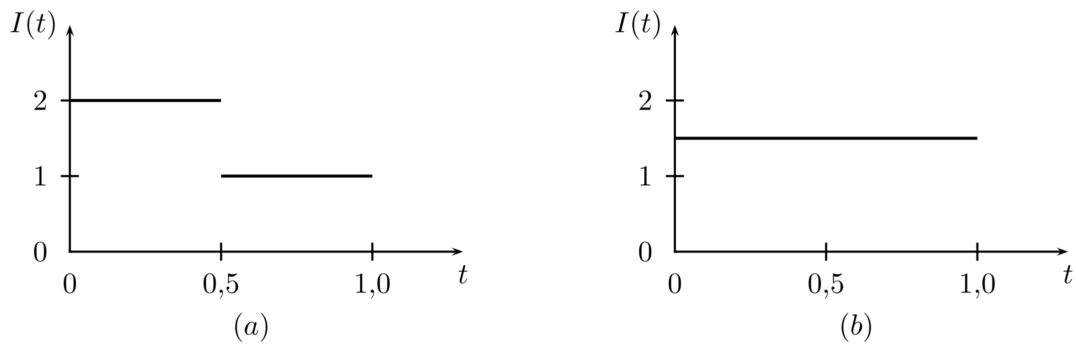

Figura 2.1: Nivel medio de inventario

figura (b) se obtiene directamente que el costo de mantención de inventario es $1{,}5c_h$.

Luego, el costo de mantención de inventario se puede entender como el área bajo la curva del nivel de inventario instantáneo $I(t)$. En términos más formales, el nivel medio de inventario entre un instante 0 y un instante τ se puede obtener según:

$$\bar{I}(\tau) = \frac{\int_0^\tau I(t)dt}{\tau} \tag{2.5}$$

Por lo tanto el costo total de mantener un inventario entre los instantes 0 y T queda:

$$\int_0^T c_h I(t)dt = c_h T \bar{I}(T) \tag{2.6}$$

Asumiendo que la primera orden de tamaño Q llega exactamente en el instante 0 y considerando que la demanda anual D es conocida, el nivel de inventario llegará a cero $\frac{Q}{D}$ veces en un año. De acuerdo al supuesto de que la demanda ocurre a tasa constante, durante un período de longitud t (en años) se demandarán exactamente dt unidades. Luego, el nivel de inventario disminuye linealmente con pendiente $-d$. Cuando el nivel de inventario $I(t)$ llega a cero, se vuelve a emitir una orden que llega instantáneamente y comienza un nuevo ciclo. De acuerdo a ello, el comportamiento del nivel de inventario $I(t)$ debe seguir el diagrama de la figura 2.2.

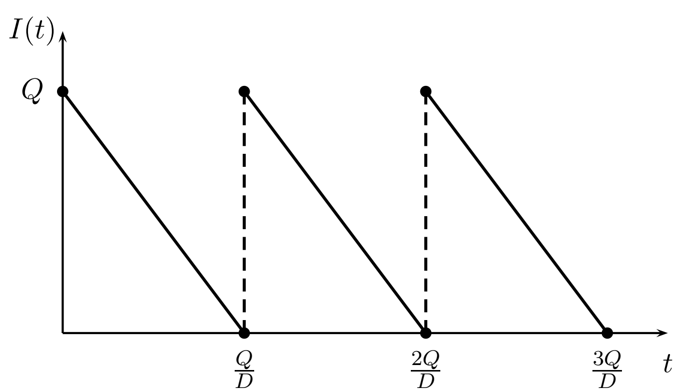

Figura 2.2: Modelo EOQ

Definición 1 *Cualquier intervalo de tiempo que comienza con la llegada de una orden y termina antes de la llegada de la orden siguiente se denomina* **ciclo**.

La figura 2.2 consiste en la repetición de ciclos de longitud $\frac{Q}{D}$, por lo tanto, cualquier año contiene exactamente el siguiente número de ciclos (n):

$$n = \frac{1}{\frac{Q}{D}} = \frac{D}{Q} \tag{2.7}$$

Luego, en un modelo EOQ el nivel medio de inventario corresponde exactamente a la mitad del tamaño de la orden Q. Este resultado es válido para cualquier modelo que tiene una demanda a tasa constante y en el cual no se permite escasez.

En suma, el costo total asociado a la mantención de inventario queda:

$$\frac{\text{costo de mantención de inventario}}{\text{año}} = \left(\frac{\text{costo de mantención}}{\text{ciclo}}\right)\left(\frac{\text{ciclos}}{\text{años}}\right) \tag{2.8}$$

Donde:

$$\left(\frac{\text{costo de mantención}}{\text{ciclo}}\right) = \frac{Q}{2}\frac{Q}{D}c_h = \frac{Q^2 c_h}{2D} \tag{2.9}$$

Luego:

$$\frac{\text{costo de mantención de inventario}}{\text{año}} = \frac{Q^2 c_h}{2D}\frac{D}{Q} = \frac{c_h Q}{2} \tag{2.10}$$

Combinando todos los costos asociados al modelo EOQ se obtiene la función de costo total ($CT(Q)$):

$$CT(Q) = \frac{c_o D}{Q} + c_p D + \frac{c_h Q}{2} \tag{2.11}$$

Para obtener el óptimo basta derivar respecto de la única variable Q:

$$\frac{dCT}{dQ} = -\frac{c_o D}{Q^2} + \frac{c_h}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad Q = \pm\sqrt{\frac{2c_o D}{c_h}} \tag{2.12}$$

Debido a que se está hablando de cantidades, sólo interesa la solución positiva:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2c_o D}{c_h}} \tag{2.13}$$

Para demostrar que es mínimo, basta considerar la segunda derivada:

$$\frac{d^2CT}{dQ^2} = \frac{2c_0 D}{Q^3} \geq 0 \ \ \forall \, Q \tag{2.14}$$

Luego, la función es convexa y efectivamente se trata de un mínimo.

Es importante observar que el tamaño de orden óptimo Q^* es independiente del costo de las unidades c_p ya que el precio a pagar no depende del tamaño de la orden. Por otro lado, se puede demostrar que el óptimo ocurre exactamente cuando se iguala el costo de ordenar al costo de mantener unidades en inventario.

Ejemplo 1 *Una pequeña aerolínea emplea* 500 *ampolletas al año. Cada vez que se efectúa una orden, se incurre en un costo de $US\$5$. Cada ampolleta cuesta $US\$0{,}4$ y el costo unitario de almacenaje anual se estima $US\$0{,}08$. Asumiendo que la demanda ocurre a tasa constante y suponiendo que no se permite escasez: ¿Cuál es el tamaño de orden óptimo? ¿Cuántas ordenes deben efectuarse al año? ¿Cuánto tiempo transcurre entre cada orden?*

De acuerdo al enunciado se tiene:

$$\begin{aligned} c_o &= 5 \\ c_h &= 0{,}08 \\ D &= 500 \end{aligned}$$

Luego:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 \times 5 \times 500}{0{,}08}} = 250$$

El número de ordenes por año resulta:

$$\frac{\text{órdenes}}{\text{año}} = \frac{D}{Q^*} = \frac{500}{250} = 2$$

Cuando el lead time L es no nulo, la determinación del tamaño de orden no cambia. Sin embargo, para evitar la ocurrencia de escasez es preciso determinar el instante en cual la orden debe ser emitida de forma que llegue a tiempo, es decir, que llegue cuando el nivel de inventario es cero.

Definición 2 *El nivel de inventario en el cual debe ser emitida la orden se conoce como el* **punto de reorden** *(R).*

Para determinar el punto de reorden en un modelo EOQ es preciso considerar dos casos:

1. La demanda durante el lead time no excede Q^*, es decir: $Ld \leq Q^*$. En este caso, el punto de reorden ocurre cuando el nivel de inventario ($I(t)$) es exactamente igual a Ld. La solución gráfica se muestra en la figura 2.3.

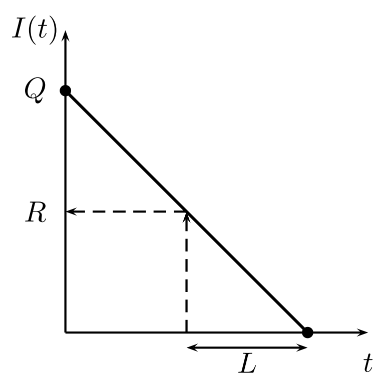

Figura 2.3: Cálculo del punto de reorden si $LD \leq Q^*$

   Si en el Ejemplo 1 suponemos que el lead time es de $\frac{1}{12}$ de año, el punto de reorden será de $\frac{1}{12}500 = 41{,}67$ ampolletas. Luego, cuando el nivel de inventario llegue a 41,67 ampolletas se debe emitir la orden.

2. Si la demanda durante el lead time excede al tamaño de orden Q^*, es decir, si $Ld > Q^*$, el punto de reorden no puede ser igual a Ld. En este caso, el punto de reorden corresponde al excedente de dividir la demanda durante el lead time (Ld) por el tamaño de la orden (Q^*).

Si en el Ejemplo 1 suponemos que el lead time es igual a 15 meses, es decir $L = \frac{15}{12}$ años, la demanda durante el lead time resulta $LD = \frac{15}{12}500 = 625$, por lo tanto ocurren $\frac{DL}{Q^*} = \frac{625}{250} = 2 + \frac{125}{250}$ ciclos durante el lead time. En otras palabras, ocurren 2 ciclos completos y queda un excedente de 125 unidades, luego el punto de reorden debe ser 125 unidades para emitir la orden.

Ejemplo 2 *Cada hora,* 100 *estudiantes toman un autobús particular para trasladarse desde una universidad al campus deportivo institucional. La administración valoriza en* 5 *dólares cada hora que un estudiante es obligado a esperar el bus. A la universidad le cuesta* 10 *dólares enviar el autobús desde la casa central hacia el campus deportivo (ida y vuelta). Asumiendo que la demanda ocurre a tasa constante, ¿cuántos autobuses deben ser enviados por hora desde la casa central? Si el viaje entre la casa central y el campus deportivo tarda* 3 *minutos, ¿cuánto estudiantes debe haber esperando para que el autobús vuelva del campus deportivo ?*

Si se considera como nivel de inventario el total de estudiantes esperando autobús, la situación se puede graficar según se muestra en la figura 2.4.

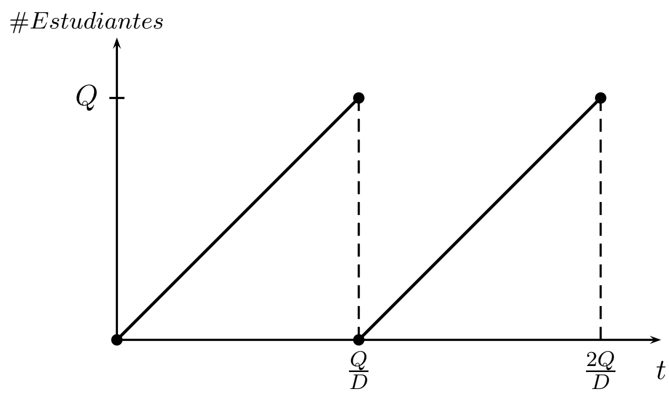

Figura 2.4: Representación gráfica del Ejemplo 2

En este caso, sólo existen los costos de mantención de inventario (espera de los estudiantes) y el de ordenar (envío del autobús), por lo tanto la función de costo por hora queda:

$$CT(Q) = c_h \frac{Q}{2} + c_0 \frac{D}{Q}$$

Por lo tanto, el tamaño de órden óptimo queda:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2c_0 D}{c_h}} = \sqrt{\frac{2 \times 10 \times 100}{5}} = 20$$

Luego, la cantidad de buses debe ser:

$$n = \frac{D}{Q} = \frac{100}{20} = 5 \text{ autobuses por hora}$$

Como el viaje tarda 3 minutos, el lead time es de $\frac{3}{60} = 0{,}05$ hora y el punto de reorden debe ser: $R = Q^* - D \times m = 20 - 100 \times 0{,}05 = 15$ estudiantes en el paradero.

2.2. Modelo EOQ con Descuentos

En una situación real, el precio de compra puede variar en función del tamaño de la orden, es decir, existen descuentos según la cantidad. Luego, el costo anual de compra o producción depende del volumen demandado. Adicionalmente si el costo de mantener unidades en inventario se expresa como un porcentaje del precio de compra, el costo anual de mantener órdenes en inventario también dependerá del precio de compra.

Si Q es la cantidad ordenada cada vez, el modelo general de descuento queda:

- Si $Q < b_1$, el costo unitario es de p_1.
- Si $b_1 \leq Q < b_2$, el costo unitario es de p_2.
- Si $b_{k-2} \leq Q < b_{k-1}$, el costo unitario es de p_{k-1}.
- Si $b_{k-1} \leq Q < b_k = \infty$, el costo unitario es de p_k.

En los puntos $b_1, b_2, b_3, \ldots b_k$ hay un cambio de precio, por lo que se denominan **puntos de quiebre del precio**. Debido a que los precios bajos están asociado a grandes cantidades, se debe cumplir $p_k < p_{k-1} < p_{k-2} < \ldots < p_2 < p_1$.

Ejemplo 3 *Una empresa está interesada en adquirir cajas para CD (*10 *unidades por caja). El valor unitario de cada caja depende de la cantidad adquirida de acuerdo a los valores de la tabla 2.1. La empresa requiere almacenar* 10000 *discos al año. El costo de emitir una orden se estima en* \$100*. El único costo de mantención de unidades está asociado al costo de oportunidad del capital, el cual se asume* 20 % *al año.*

Cantidad de cajas ordenadas (Q)	Precio unitario [\$]
$0 \leq Q < 100$	50,0
$100 \leq Q < 300$	49,0
$Q \geq 300$	48,5

Cuadro 2.1: Tramos de costo el Ejemplo 3

Cada vez que se emita una orden, ¿cúantas cajas para CD deben ser ordenadas? ¿Cuántas órdenes deben emitirse anualmente? ¿Cuál es el costo total anual de satisfacer la demanda de la empresa?

El objetivo es determinar el tamaño de orden Q que minimiza los costos totales $CT(Q)$. Hay que considerar que el tamaño de orden Q_i^* para cada tramo i debe encontrarse en el intervalo $b_{i-1} \leq Q_i^* < b_i$ para que sean válidos los valores empleados para calcular Q_i^*, es decir, el costo unitario sea p_i.

Por otro lado, para cualquier valor Q fijo, se satisface

$$CT_k(Q) < CT_{k-1}(Q) < \ldots < CT_2(Q) < CT_1(Q) \tag{2.15}$$

ya que el precio unitario p_k es decreciente.

Por otro lado, si:

$$\begin{array}{rcl} b_i \leq Q_i^* < b_{i+1} & \rightarrow & Q = Q_i^* \\ Q_i^* < b_i & \rightarrow & Q = b_i \\ Q_i^* > b_{i+1} & \rightarrow & Q = b_{i+1} \end{array} \tag{2.16}$$

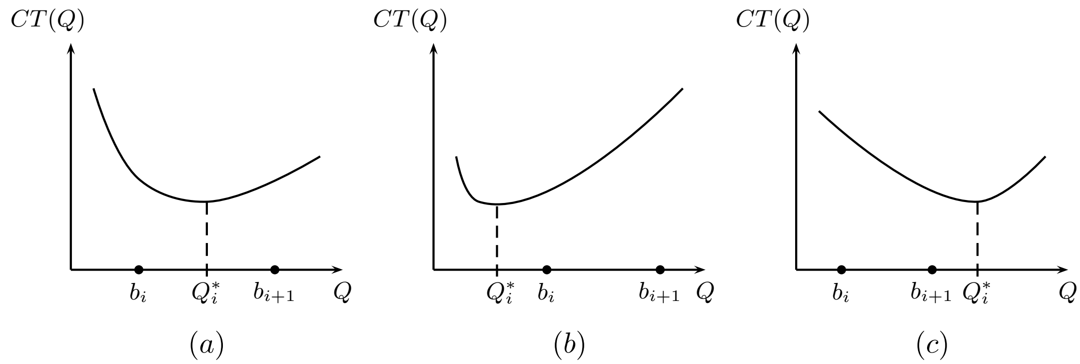

Figura 2.5: Ubicación del óptimo

La afirmación anterior se justifica en el hecho de que $CT_i(Q)$ decrece para $Q < Q_i^*$ y crece para $Q > Q_i^*$ tal como se muestra en la Figura 2.5.

Volviendo al ejemplo se tiene: $c_o = 100$ y $D = 1000$ al año. El costo de mantención de inventario es $c_h = 0{,}2p_i$ dependiendo del tramo. Luego, de acuerdo a la expresión de Q^* para el EOQ se completa la tabla 2.2.

Tramo	p_i	c_{h_i}	Q_i^*	Q	$CT(Q)$
1	50,0	10	141,42	100	51500
2	49,0	9,8	142,86	142,86	50400
3	48,5	9,7	143,59	300	50288,33

Cuadro 2.2: Tramos de costo el Ejemplo 3

Por lo tanto, la mejor opción es ordenar 300 unidades a pesar de no ser el valor óptimo para ese tramo.

2.3. Modelo EOQ con Producción

Es frecuente que los artículos sean producidos internamente en lugar de ser adquiridos a un proveedor externo. En dichos casos, el supuesto de que todos los artículos llegan juntos una vez ordenados puede ser irreal y se recurre a un modelo con producción a tasa constante.

Al igual que el caso de EOQ estándar, se supondrá que la demanda es determinística y ocurre a tasa constante. También se supondrá que no se admite escasez. El modelo supone que los productos son fabricados a una tasa p constante de unidades por unidad de tiempo (normalmente al año), luego durante un intervalo de tiempo de longitud t se producen exactamente pt unidades. Sea:

$$\begin{aligned} Q_p &= \text{número de unidades producidas por corrida de producción} \\ c_c &= \text{costo de cada corrida de producción} \\ c_h &= \text{costo de mantener una unidad en inventario por un año} \\ D &= \text{demanda anual por el producto} \\ d &= \text{demanda por unidad de tiempo} \end{aligned} \tag{2.17}$$

Asumiendo que la producción comienza en el instante 0, la variación en el tiempo del nivel de inventario se muestra en la Figura 2.6. Cuando comienza el período existe una producción a tasa constante p, simultáneamente existe una demanda a tasa d. Suponiendo que $p > d$ (para poder satisfacer la demanda), el inventario crece a una tasa de $p - d$ artículos por unidad de tiempo. Luego, el nivel máximo de inventario se puede calcular como $t_1(p - d)$. En este caso, los únicos costos involucrados son los relativos al costo de producción y al de mantener unidades en inventario.

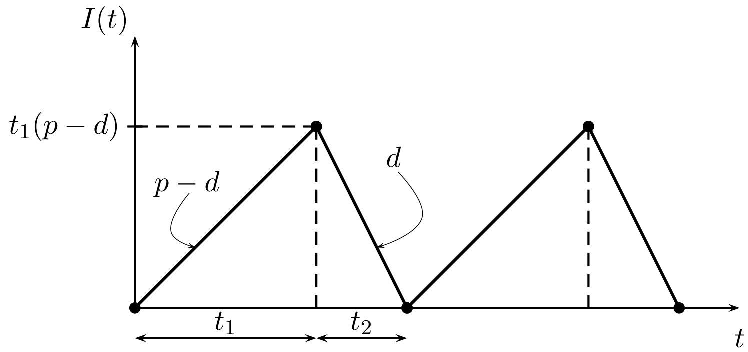

Figura 2.6: Representación gráfica EOQ con producción

Para calcular los costos de producción es preciso determinar el número de corridas de producción necesarias para satisfacer la demanda D. Suponiendo que el costo de la corrida de producción es independiente del volumen producido, se tiene:

$$\text{costo producción} = (\text{costo por corrida}) \times (\text{número de corridas}) = c_c \frac{D}{Q_p} \tag{2.18}$$

El costo de inventario puede ser calculado según el nivel de inventario medio, en otras palabras el área bajo la curva divida por el tiempo transcurrido:

$$\text{costo de inventario} = c_h \frac{\frac{1}{2} t_1(p-d)(t_1+t_2)}{t_1+t_2} = c_h \frac{1}{2} t_1 (p-d) \tag{2.19}$$

El intervalo de tiempo t_1 describe la duración del período de producción por ciclo, por lo tanto:

$$Q_p = t_1 p \quad \rightarrow \quad t_1 = \frac{Q_p}{p} \tag{2.20}$$

Reemplazando (2.20) en (2.19) se obtiene:

$$\text{costo de inventario} = \frac{c_h (p-d) Q_p}{2p} \tag{2.21}$$

Luego, el costo total queda en función únicamente de Q_p:

$$CT(Q_p) = c_c \frac{D}{Q_p} + \frac{c_h (p-d) Q_p}{2p} \tag{2.22}$$

Derivando respecto de Q_p:

$$\frac{dCT}{Q_p} = -c_c \frac{D}{Q_p^2} + \frac{c_h (p-d)}{2p} = 0 \tag{2.23}$$

Luego, tomando la solución positiva:

$$Q_p^* = \sqrt{\frac{2c_c D p}{c_h(p-d)}} \tag{2.24}$$

Se puede verificar que la segunda derivada es positiva, por lo que efectivamente se trata de un mínimo. La solución anterior está relacionada con el óptimo del EOQ (asimilando el c_c a c_0):

$$Q_p^* = \sqrt{\frac{2c_c D}{c_h}}\sqrt{\frac{p}{p-d}} = Q^*\sqrt{\frac{p}{p-d}} \tag{2.25}$$

Por lo tanto, en la medida que p crece el volumen de producción crece y cuando $p >> d$ el factor $\frac{p}{p-d}$ tiende a 1 y la solución se aproxima a la del *EOQ*.

Ejemplo 4 *Una fábrica requiere producir* 10000 *unidades al año. Cada artículo se valoriza en* \$2000. *La empresa tiene una capacidad de producción de* 25000 *unidades al año. El costo de cada corrida de producción es* \$200 *y el costo anual de mantener una unidad en inventario durante un año es* 0,25 % *del valor del artículo. Determine el volumen de producción óptimo. ¿Cuántas corridas de producción deben efectuarse al año?*

Como $p = 25000$ [unidades/año], $d = 10000$ [unidades/año], $c_h = 0{,}25 \times 2000 = \$500$ [unidad/año] y $c_c = \$2000$ por corrida de producción.

Luego:

$$Q_p = \sqrt{\frac{2 \times 200 \times 10000 \times 25000}{500(25000 - 10000)}} = 115{,}47$$

Por lo tanto el número de corridas de producción al año resulta:

$$n = \frac{10000}{115{,}47} = 86{,}60$$

2.4. Modelo EOQ con Órdenes Pendientes

En muchas situaciones reales la demanda no puede ser satisfecha a tiempo, en cuyo caso ocurre escasez. Cuando ocurre escasez se incurre en costos adicionales por: pérdida de negocios, órdenes especiales, etc. En dichas situaciones es preciso modificar el modelo EOQ usual.

Sea c_s el costo unitario de mantener artículos pendientes durante un año. Los parámetros c_o, c_h, c_p y D mantienen su significado usual. En términos generales, el valor de c_s es muy difícil de estimar. Para construir el modelo definimos:

$$\begin{aligned} Q &= \text{quantidad ordenada} \\ S &= \text{quantidad máxima de unidades pendientes acumuladas} \end{aligned} \tag{2.26}$$

Se asume además que el lead time es nulo cuando se emite una órden por Q unidades. Si la primera orden ocurre en el instante $t = 0$, la representación gráfica de la situación queda como la Figura 2.7.

Debido a que el costo de compra no depende de Q y S, los costos involucrados son:

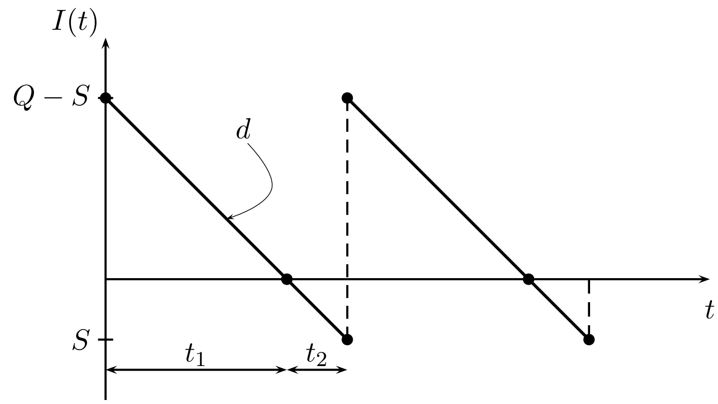

Figura 2.7: Representación gráfica modelo EOQ con órdenes pendientes

- Costo de ordenar.
  Como en cada ciclo se satisfacen $(Q-S)+S=Q$ artículos, si la demanda anual es D el número de ciclos resulta:

$$n = \frac{D}{Q} \tag{2.27}$$

  Luego, el costo de ordenar queda:

$$\text{costo de ordenar} = c_0\frac{D}{Q} \tag{2.28}$$

- Costo de compra.

$$\text{costo de compra} = c_pD \tag{2.29}$$

- Costo de mantención de inventario.
  De acuerdo a lo visto previamente, corresponde al nivel medio de inventario, o bien el área bajo la curva dividida por la duración del ciclo, por el costo unitario c_h:

$$\text{costo de inventario} = c_h\frac{\frac{t_1}{2}(Q-S)}{t_1+t_2} \tag{2.30}$$

  De la Figura 2.7 se obtiene:

$$\begin{aligned} dt_1 &= (Q-S) \\ dt_2 &= S \end{aligned} \tag{2.31}$$

  Luego, reemplazando en (2.30):

$$\text{costo de inventario} = c_h\frac{\frac{(Q-S)^2}{2d}}{\frac{Q}{d}} = c_h\frac{(Q-S)^2}{2Q} \tag{2.32}$$

- Costo por órdenes pendientes.
  De igual forma al costo de mantención de inventario corresponde al nivel medio de órdenes pendientes por el costo unitario de mantener órdenes pendientes c_s:

$$\text{costo por órdenes pendiente} = c_s\frac{\frac{t_2}{2}S}{t_1+t_2} \tag{2.33}$$

Reemplazando en (2.33) con (2.34):

$$\text{costo de inventario} = c_s \frac{\frac{S^2}{2d}}{\frac{Q}{d}} = c_s \frac{S^2}{2Q} \tag{2.34}$$

A partir de las expresiones anteriores, el costo total asociado al modelo EOQ con órdenes pendientes queda:

$$CT(Q,S) = c_0 \frac{D}{Q} + c_h \frac{(Q-S)^2}{2Q} + c_s \frac{S^2}{2Q} + c_p D \tag{2.35}$$

Debido a que la función anterior posee dos variables, los candidatos a óptimos se obtienen de:

$$\nabla CT = \left(\frac{\partial CT}{\partial Q}, \frac{\partial CT}{\partial S} \right) = (0,0) \tag{2.36}$$

En primer lugar se obtiene:

$$\frac{\partial CT}{\partial Q} = -c_0 \frac{D}{Q^2} + \frac{c_h}{2} - (c_h + c_s) \frac{S^2}{2Q^2} = 0 \tag{2.37}$$

En segundo lugar resulta:

$$\frac{\partial CT}{\partial s} = -\frac{c_h}{Q}(Q-S) + c_s \frac{S}{Q} = 0 \quad \rightarrow \quad S^* = \frac{c_h}{c_h + c_s} Q^* \tag{2.38}$$

Reemplazando (2.38) en (2.37):

$$Q^* = \sqrt{\frac{2Dc_0}{c_h}} \sqrt{\frac{c_h + c_s}{c_s}} = Q^*_{EOQ} \sqrt{\frac{c_h + c_s}{c_s}} \tag{2.39}$$

Finalmente, reemplazando en (2.38) se obtiene:

$$S^* = \frac{c_h}{\sqrt{c_s(c_h + c_s)}} \sqrt{\frac{2Dc_o}{c_h}} = \frac{c_h}{\sqrt{c_s(c_h + c_s)}} Q^*_{EOQ} \tag{2.40}$$

En las expresiones anteriores, en la medida que c_s crece Q^* tiende al óptimo de un EOQ estándar mientras que S^* tiende a cero.

Ejemplo 5 *Cada año, una óptica vende* 10000 *marcos para lentes. El proveedor de la óptica vende cada marco a* $US\$15$. *El costo de emitir una orden se estima en* $US\$50$. *La óptica pretende mantener órdenes pendientes asumiendo un costo anual de* $US\$15$ *sobre cada marco a causa de la eventual pérdida de futuros negocios. El costo anual de mantener una unidad en inventario se estima en el* 30 % *del valor de compra de cada marco. ¿Cúal es el tamaño de orden óptimo? ¿Qué capacidad de almacenaje debe tener la bodega de la óptica?*

Los parámetros para efectuar los cálculos suponiendo un modelo EOQ con escasez son:

$$\begin{aligned}
c_0 &= 50 \\
D &= 10000 \\
c_h &= 0{,}3 \times 15 = 4{,}5 \\
c_s &= 15
\end{aligned}$$

De acuerdo a las expresiones anteriores:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2Dc_0}{c_h}}\sqrt{\frac{c_h + c_s}{c_s}} = \sqrt{\frac{2 \times 10000 \times 50}{4{,}5}}\sqrt{\frac{4{,}5 + 15}{15}} = 537{,}48$$

Por lo tanto, el tamaño de órden óptimo corresponde a 537,48 unidades. Para determinar la capacidad de la bodega requerida es preciso evaluar el máximo nivel de inventario: $Q - S$

$$S^* = \frac{c_h}{\sqrt{c_s(c_h + c_s)}}\sqrt{\frac{2Dc_o}{c_h}} = \frac{4{,}5}{\sqrt{15(4{,}5 + 15)}}\sqrt{\frac{2 \times 10000 \times 50}{4{,}5}} = 124{,}03$$

Luego, la capacidad de la bodega debe ser al menos de $Q - S = 537{,}48 - 124{,}03 = 413{,}45$.

2.5. Ejemplos Adicionales

1. Identifique las variables y obtenga las expresiones para calcular los valores óptimos de los modelos de las Figuras 2.8 y 2.9. Haga los supuestos que crea necesarios.

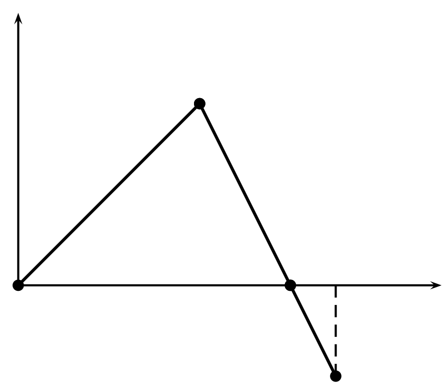

Figura 2.8: Ejemplo adicional 1.1

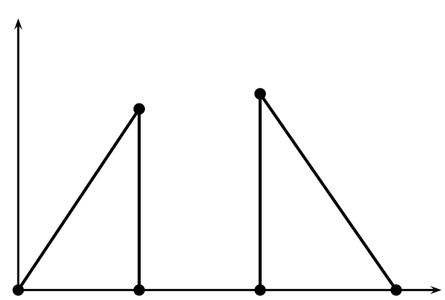

Figura 2.9: Ejemplo adicional 1.2

3. Modelos Probabilísticos

Todos los modelos de inventario discutidos en la sección anterior requieren que la demanda sea conocida con certeza. En general la demanda puede ser incierta o aleatoria. A continuación se modificarán algunos de los modelos de inventario vistos previamente para incorporar la incertidumbre.

3.1. Modelo EOQ con Demanda Incierta

Se trabajará suponiendo que el lead time es no nulo y que la demanda durante dicho período de tiempo es aleatoria.

Se mantienen las definiciones del EOQ, es decir:

$$\begin{aligned} c_0 &= \text{costo de ordenar} \\ c_h &= \text{costo de almacenar una unidad durante un año} \\ L &= \text{duración del lead time} \\ Q &= \text{cantidad ordenada} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Se agregan las siguientes definiciones:

$$\begin{aligned} D &= \text{variable aleatoria (continua) que representa la demanda anual} \\ c_b &= \text{costo por unidad insatisfecha} \\ ID(t) &= \text{nivel de inventario disponible en el isntante } t \\ B(t) &= \text{cantidad de unidades pendientes en el instante } t \\ I(t) &= \text{inventario neto en el instante } t = ID(t) - B(t) \\ R &= \text{punto de reorden} \end{aligned} \tag{3.2}$$

En la Figura 3.1 se verifica que $ID(0) = 200$, $ID(1) = 100$, $ID(6) = 0$ y $ID(7) = 0$. Además $B(t) = 0$ para $0 \leq t \leq 6$ y $B(7) = 100$. Luego: $I(0) = 200 - 0 = 200$, $I(3) = 260 - 0 = 260$, $I(7) = 0 - 100 = -100$. Si el lead time es $L = 2$ meses, el punto de reorden $R = 100$ unidades. Cuando el de inventario llega a 100 unidades, se emite una orden por $Q = 240$ artículos.

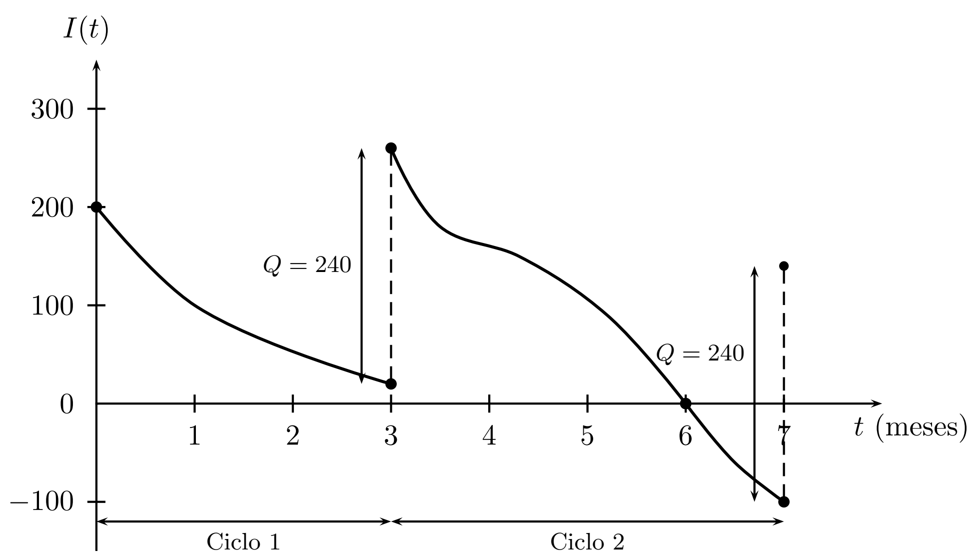

Figura 3.1: Evolución del nivel de inventario

Sea:

$$X = \text{variable aleatoria que representa la demanda durante el lead time} \tag{3.3}$$

Se asume que X es una variable aleatoria continua con función de densidad de probabilidad $f(x)$, media $E[X]$, varianza $V[X]$ y desviación estándar σ_X. Si se asume que la demanda en instantes de tiempo distintos es independiente, entonces se puede demostrar que X satisface:

$$E[X] = LE[D], \qquad V[X] = LV[D], \qquad \sigma_X = \sigma_D\sqrt{L} \tag{3.4}$$

Si se asume que D se distribuye normalmente, entonces X también se distribuye normalmente.

Si la duración del lead time L es una variable aleatoria con media $E[L]$, varianza $V[L]$ y desviación estándar σ_L, y si la longitud del lead time es independiente de la demanda por unidad de tiempo durante el lead time, entonces:

$$E[X] = E[L]E[D] \qquad \text{y} \qquad V[X] = E[L]V[D] + E[D]^2V[L] \tag{3.5}$$

Se desea seleccionar Q y R tal que minimicen el costo anual esperado (excluido el costo de compra).

Volviendo a la Figura 3.1, si la primera orden por $Q = 240$ llega exactamente en el instante 3 y se asume que $L = 2$ meses, las órdenes son emitidas en el instante $O_1 = 1$ y $O_2 = 5$. Entonces, las órdenes son recibidas en $O_1 + L = 3$ y $O_2 + L = 7$, respectivamente. Un **ciclo** se define como el intervalo de tiempo entre los instantes donde son recibidas órdenes. Luego, la Figura 3.1 define dos ciclos: el primer ciclo desde el instante 0 hasta $O_1 + L = 3$; y el ciclo 2 desde O_1 hasta $O_2 + L = 7$.

Durante el ciclo 1, la demanda durante el lead time es menor que R, por lo que no ocurre escasez. Durante el ciclo 2, en cambio, la demanda durante el lead time excede el punto de reorden R, por lo que ocurre escasez entre los instantes 6 y $O_2 + L = 7$. Evidentemente, incrementando el punto de reorden R disminuye los stockouts. Sin embargo, aumentar el punto de reorden R aumenta también el nivel medio de inventario y por lo tanto los costos de almacenaje. Luego, el punto de reorden R óptimo debe representar un equilibrio entre los costos de mantención de inventario y los costos de escasez.

3.1.1. Cálculo del punto de reorden sin pérdida de ventas (Órdenes Pendientes)

Cuando la escasez no implica la pérdida de ventas, se habla del caso con órdenes pendientes. Se asume que el costo de compra por cada unidad es único, por lo tanto el costo de compra es fijo. Definiendo como $CT(Q, R)$ el costo anual esperado (excluyendo el costo de compra) considerando que cada orden por Q unidades es efectuada cuando el punto de reorden es R, entonces:

$$CT(Q, R) = \text{costo inventario} + \text{costo de ordenar} + \text{costo por escasez} \tag{3.6}$$

Para obtener el óptimo se considerará que el nivel medio de órdenes pendientes es relativamente pequeño respecto el nivel medio de inventario, lo que en la práctica es bastante razonable pues la escasez ocurre sólo una pequeña porción de tiempo de la duración total del ciclo. Como $I(t) = ID(t) - B(t)$, entonces:

$$E[I(t)] \approx E[ID(t)] \tag{3.7}$$

Para estimar el costo por mantención de inventario debemos estimar el valor medio o valor esperado de $I(t)$. Como la demanda ocurre a tasa constante, se puede escribir:

$$\text{Valor esperado de } I(t) \text{ durante un ciclo} = \frac{1}{2}(\text{valor esperado de } I(t) \text{ al inicio del ciclo} + \text{valor esperado de } I(t) \text{ al término del ciclo}) \quad (3.8)$$

Al término del ciclo (instantes antes de que llegue la orden), el nivel de inventario es igual al punto de reorden R menos la demanda durante el lead time X. Luego, el valor esperado al término del ciclo queda:

$$I(t) = R - E[X] \quad (3.9)$$

Al inicio del ciclo, el nivel de inventario al término del ciclo anterior se ve aumentado por la llegada de la orden de tamaño Q. Luego, el valor esperado para $I(t)$ al comienzo del ciclo corresponde a:

$$I(t) = R - E[X] + Q \quad (3.10)$$

Reemplazando en (3.8) se obtiene:

$$\text{Valor esperado de } I(t) \text{ durante un ciclo} = \frac{Q}{2} + R - E[X] \quad (3.11)$$

Por lo tanto, el costo esperado por mantener unidades en inventario queda:

$$CT(Q,R)_{\text{inventario}} = c_h\left(\frac{Q}{2} + R - E[X]\right) \quad (3.12)$$

Para determinar el costo anual debido a stockouts u órdenes pendientes, se debe definir:

$$B_R = \text{variable aleatoria que representa el número de stockouts durante un ciclo asociado a } R \quad (3.13)$$

Luego, el costo por escasez anual corresponde al costo esperado por escasez por ciclo por el número esperado de ciclos al año, entonces:

$$\frac{\text{costo esperado por escasez}}{\text{ciclo}} = c_B E[B_R] \quad (3.14)$$

Como eventualmente toda la demanda puede ser satisfecha, ocurren en promedio $\frac{E[D]}{Q}$ órdenes por año. Luego:

$$\frac{\text{costo por escasez}}{\text{año}} = \frac{c_B E[B_R] E[D]}{Q} \quad (3.15)$$

Finalmente:

$$\text{Costo esperado por ordenar} = c_0 \frac{\text{órdenes esperadas}}{\text{año}} = \frac{c_0 E[D]}{Q} \quad (3.16)$$

Luego, el costo total asociado queda:

$$CT(Q,R) = c_h\left(\frac{Q}{2} + R - E[X]\right) + \frac{c_B E[B_R] E[D]}{Q} + \frac{c_0 E[D]}{Q} \quad (3.17)$$

A través de $\nabla CT(Q,R) = (0,0)$ se obtienen los valores óptimos de Q^* y R^*. Sin embargo, en la mayoría de las situaciones el valor óptimo de Q es muy cercano a de un EOQ normal, es decir $Q^* = \sqrt{\frac{2c_0E[D]}{c_h}}$. Por lo tanto, se aceptará el óptimo del EOQ como el valor Q^* para el caso en estudio.

Dado el valor de Q^*, se puede obtener R^* de un análisis marginal.

Si se asume un valor de Q, el costo anual esperado por ordenar es independiente de R. Entonces, para determinar el valor de R^* que minimiza $CT(Q,R)$ sólo es necesario minimizar la suma de los costos de mantención de inventario y el costo por escasez. Si el punto de reorden R se incrementa en Δ (pequeño), entonces el costo de mantención de inventario:

$$c_h\left(\frac{Q}{2}+R+\Delta-E[X]\right)-c_h\left(\frac{Q}{2}+R-E[X]\right)=c_h\Delta>0 \quad \text{si } \Delta>0 \tag{3.18}$$

Si se incrementa el punto de reorden de R a $R+\Delta$, el costo esperado anual de escasez se reduce debido a que en cualquier ciclo que la demanda durante el lead time sea menos de R, el número de stockouts durante el ciclo será reducido en Δ unidades. En otras palabras, incrementando el punto de reorden de R a $R+\Delta$ se reduce el costo de stockouts en $c_B\Delta$ durante una fracción $IP(X\geq R)$ de todos los ciclos. Entonces, debido a que hay en promedio $\frac{E[D]}{Q}$ ciclos por año, incrementar el punto de reorden de R a $R+\Delta$ se reduce el costo esperado por stockouts en:

$$\frac{\Delta E[D]c_B IP(X\geq R)}{Q} \tag{3.19}$$

En la medida que R crece, $IP(X\geq R)$ decrece, entonces en la medida que R se incrementa, la reducción esperada en el costo anual por escasez al incrementar el punto de reorden R en Δ decrece (Figura 3.2). Luego, el valor de R^* debe ser en el cual los beneficios marginales se igualan a los costos marginales, entonces:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta E[D]c_B IP(X\geq R^*)}{Q} &= c_h\Delta \\ IP(X\geq R^*) &= \frac{c_hQ}{c_BE[D]}\end{aligned} \tag{3.20}$$

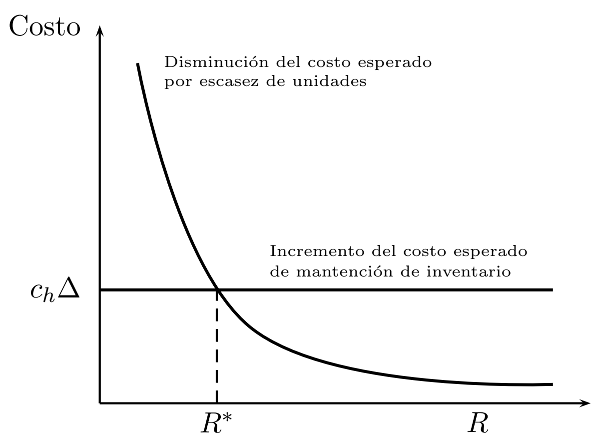

Figura 3.2: Relación entre costos de inventario y escasez

Evidentemente, si:

$$\frac{c_hQ}{c_BE[D]}>1 \tag{3.21}$$

el problema no tiene solución y el costo de mantener unidades en inventario es prohibitivo en relación al costo por órdenes pendientes. En dicho caso, el punto de reorden debe ser lo más pequeño posible. En el caso que R^* resulte negativo, se debe tomar el punto de reorden más pequeño posible.

Ejemplo 6 *Cada año, una tienda de computadores vende* 1000 *cajas para CD. La demanda anual por cajas de CD se distribuye normalmente con una desviación estándar de* 40,8 *cajas. La tienda posee un proveedor regional. Cada órden es entregada en* 2 *semanas. El costo de efectuar cada orden es* $US\$50$*, el costo anual de mantener una caja en inventario es* $US\$10$*. El costo unitario por escasez se asumen en* $US\$20$*. Se admite mantener órdenes pendientes. Determine el punto de reorden, el tamaño de orden, y el nivel de seguridad del inventario la tienda. ¿Cúal es la probabilidad que ocurra un stockout durante el lead time?*

En primer lugar se debe determinar el tamañ6 de orden de acuerdo al modelo EOQ normal. Como $c_h = 10$, $c_o = 50$ y $E[D] = 1000$ se obtiene:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 \times 50 \times 1000}{10}} = 100$$

Reemplazando el valor de Q^* en (3.20 se puede determinar el punto de reorden. Los parámteros de la distribución demanda durante el lead time X puede ser obtenidos a partir de la distribución de la demanda anual a través de la longitud $L = 2$ semanas del lead time. Luego, como D se distribuye normalmente, X también se distribuye normalmente según:

$$E[X] = \frac{E[D]}{26} = \frac{1000}{26} = 38{,}46 \quad \text{y} \quad \sigma_X = \frac{\sigma_D}{\sqrt{26}} = \frac{40{,}8}{\sqrt{26}} = 8$$

Como $c_B = 20$, se obtiene:

$$IP(X \geq R) = \frac{10 \times 1000}{20 \times 1000} = 0{,}05$$

Luego, el punto de reorden debe ser escogido de tal forma que la probabilidad de que ocurra un stockout durante un ciclo sea igual a 0,05. Estandarizando respecto de X resulta:

$$\begin{aligned} IP\left(\frac{X - 38{,}46}{8} \geq \frac{R - 38{,}46}{8}\right) &= 0{,}05 \\ IP\left(Z \geq \frac{R - 38{,}46}{8}\right) &= 0{,}05 \end{aligned}$$

A partir de una tabla normal estandarizada se obtiene $\Phi(1{,}65) = IP(Z \leq 1{,}65) = 0{,}9505$. Entonces $IP(Z \geq 1{,}65) = 1 - 0{,}9505 = 0{,}0495$ y:

$$\frac{R - 38{,}46}{8} = 1{,}65 \quad \rightarrow \quad R = 51{,}66$$

Luego, el nivel de seguridad queda: $R - E[X] = 51{,}66 - 38{,}46 = 13{,}20$.

3.1.2. Cálculo del punto de reorden con pérdida de ventas

Si se asume que todos los stockouts involucran un pérdida de ventas , debe existir un costo asociado a cada pérdida de venta. Sea dicho costo c_{LS}, el que excluye el costo por pérdida de futuros clientes.

Al igual que el caso con órdenes pendientes, se asume que el tamaño de orden óptimo se puede aproximar de buena manera por el Q^* del EOQ clásico. Siguiendo el mismo procedimiento de la sección anterior (análisis marginal), se puede demostrar que el punto de reorden óptimo queda definido por:

$$\begin{aligned} Q^* &= \sqrt{\frac{2c_oE[D]}{c_h}} \\ IP(X \geq R^*) &= \frac{c_hQ^*}{c_hQ^* + c_{LS}E[D]} \end{aligned} \tag{3.22}$$

Continuando con el Ejemplo 6, supondremos que cada caja de CD se vende a $US\$50$ y el costo de almacenaje es $US\$30$. Asumiendo que el costo asociado a los stockouts de $US\$20$ (representa las unidades perdidas), se puede obtener c_{LS} como la suma de la pérdida de ganancia $(50-30)$ al costo por unidad perdida (20), entonces $c_{LS} = 20 + 20 = 40$. Luego:

$$IP(X \geq R) = \frac{10 \times 1000}{10 \times 100 + 40 \times 1000} = 0{,}024$$

Como $E[X] = 38{,}46$ y $\sigma_X = 8$, estandarizando se obtiene:

$$\begin{aligned} IP\left(\frac{X - 38{,}46}{8} \geq \frac{R - 38{,}46}{8}\right) &= 0{,}024 \\ IP\left(Z \geq \frac{R - 38{,}46}{8}\right) &= 0{,}024 \end{aligned}$$

A partir de una tabla normal estándar, se obtiene: $\Phi(1{,}98) = IP(z \leq 1{,}98) = 0{,}9762$, entonces $IP(Z \geq 1{,}98) = 1 - 0{,}9762 = 0{,}0238$. Luego:

$$\frac{R - 38{,}46}{8} = 1{,}98 \qquad \rightarrow \qquad R = 54{,}30$$

Luego, en el caso de pérdida de ventas, el nivel de seguridad del nivel de inventario es $54{,}30 - 38{,}46 = 15{,}84$.

3.2. Modelo EOQ con Demanda Incierta: Enfoque del nivel de servicio para determinar el nivel de inventario de seguridad

En términos generales es muy difícil determinar en forma exacta el costo asociado a la escasez de una unidad. Por esta razón, muchos administradores deciden controlar la escasez mediante la definición de ciertos niveles de servicio. Discutiremos dos niveles de servicio:

- **Nivel de Servicio** 1 **(SLM_1)**, corresponde a la fracción esperada (usualmente expresada como un porcentaje) de la demanda que es satisfecha a tiempo.
- **Nivel de Servicio** 2 **(SLM_2)**, el número esperado de ciclos por año en los que ocurre escasez.

Para realizar el análisis, se supondrá que se admiten órdenes pendientes. Consideremos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 7 *Suponga que para una situación dada de inventario, la demanda anual promedio es* 1000 *y el* Q^* *es igual a* 100*. La demanda durante el lead time es aleatoria y está descrita por la distribución de probabilidad de la tabla 3.1. Determine el* SLM_1 *y el* SLM_2 *si el punto de reorden es* 30 *unidades.*

Demanda durante el lead time	Probabilidad
20	$\frac{1}{5}$
30	$\frac{1}{5}$
40	$\frac{1}{5}$
50	$\frac{1}{5}$
60	$\frac{1}{5}$

Cuadro 3.1: Distribución de probabilidad Ejemplo 7

La demanda esperada durante el lead time es $\frac{1}{5}20 + \frac{1}{5}30 + \frac{1}{5}40 + \frac{1}{5}50 + \frac{1}{5}60 = 40$ unidades. Si el punto de reorden es 30 unidades y la demanda durante el lead time es de 20 ó 30 unidades, no se experimentará escasez. Durante un ciclo en el cual la demanda durante el lead times sea 40, ocurrirá una escasez de 10 unidades, etc. Luego, el número esperado de unidades pendientes resulta: $\frac{1}{5}0 + \frac{1}{5}0 + \frac{1}{5}10 + \frac{1}{5}20 + \frac{1}{5}30 = 12$.

Como $Q^* = 100$ y toda la demanda debe ser eventualmente satisfecha, el número promedio de órdenes efectuadas cada año será $\frac{E[D]}{Q} = \frac{1000}{100} = 10$. Entonces, el número promedio de unidades pendientes queda $12 \times 10 = 120$ unidades. Entonces, cada año, en promedio se satisfacen $1000 - 120 = 880$ unidades a tiempo. En este caso, el $SLM_1 = \frac{880}{1000} = 0{,}88$ o bien el 88 %. Esto muestra que incluso si el punto de reorden es menos que la media de la demanda durante el lead time, de todas formas es posible obtener un SLM_1 alto ya que los stockouts pueden sólo ocurrir durante el lead time, que es normalmente una pequeña porción de tiempo de cada ciclo.

Si el punto de reorden es 30, ocurrirá un stockout en cualquier ciclo en el cual la demanda durante el lead time exceda 30 unidades. Entonces, la probabilidad de un stockout durante un ciclo es $IP(X = 40) + IP(X = 50) + IP(X = 60) = \frac{3}{5}$. Luego, como en promedio hay 10 ciclos por año, el número esperado de ciclos en un año en los que habrá escasez son $10\frac{3}{5} = 6$. Entonces, con un punto de reorden de 30 unidades, se obtiene $SLM_2 = 6$ stockouts por año.

3.2.1. Determinación del punto de reorden y el nivel de inventario de seguridad para el SLM_1

Dado una valor deseado para el SLM_1, ¿Cómo se puede determinar el punto de reorden que entrega deseado nivel de servicio? Supongamos que se ordenan Q^* del EOQ y se usa el punto de reorden R. De acuerdo a la sección anterior:

$$\begin{aligned} \frac{\text{número de órdenes pendientes esperadas}}{\text{ciclo}} &= E[B_R] \\ \frac{\text{número de órdenes pendientes esperadas}}{\text{año}} &= \frac{E[B_R]E[D]}{Q} \end{aligned} \tag{3.23}$$

Donde $E[D]$ es la demanda anual esperada y B_R es la variable aleatoria asociada al número de stockouts durante un ciclo. Sea SLM_1 el porcentaje de toda la demanda que es satisfecho a tiempo. Entonces, para un valor dado de Q y R, se tiene:

$$1 - SLM_1 = \frac{\text{número de unidades insatisfechas al año}}{\text{demanda esperada por año}} = \frac{E[B_R]\frac{E[D]}{Q}}{E[D]} = \frac{E[B_R]}{Q} \tag{3.24}$$

La ecuación 3.24 puede ser empleada para determinar el punto de reorden para un nivel de servicio deseado. Si se asume que la demanda durante el lead time se distribuye normalmente con media $E[X]$ y desviación estándar σ_X, se requiere estimar $E[B_R]$ para determinar el punto de reorden.

Definición 3 *La función de* **pérdida normal** $NL(y)$ *se define de acuerdo a que* $\sigma_x NL(y)$ *es el número esperado de unidades insatisfechas que ocurrirán durante el lead time si la demanda durante el lead time se distribuye normalmente, si su media es* $E[X]$*, su desviación estándar es* σ_X *y el punto de reorden es* $E[X] + y\sigma_X$*.*

En otras palabras, si se mantiene la desviación estándar y (en términos de la demanda durante el lead time) del nivel de seguridad de inventario, $NL(y)\sigma_X$ es el número esperado de unidades insatisfechas que ocurren durante el lead time.

Debido a que puntos de reorden elevados conducen a pocas órdenes pendientes, se debería esperar que $NL(y)$ sea una función decreciente de y. Se puede demostrar que para $y \leq 0$, $NL(y) = NL(-y) - y$.

Asumiendo una demanda durante el lead time normal, se puede determinar el punto de reorden R que entrega un nivel deseado de SLM_1 tomando:

$$y = \frac{r - E[X]}{\sigma_X} \tag{3.25}$$

La definición de la función de pérdida normal implica que durante el lead time un punto de reorden R entregará un número esperado de unidades insatisfechas $E[B_R]$ dado por:

$$E[B_R] = \sigma_X NL\left(\frac{r - E[X]}{\sigma_X}\right) \tag{3.26}$$

Sustituyendo (3.26) en (3.25), se obtiene el punto de reorden para SLM_1 con demanda normal durante el lead time:

$$\begin{aligned} 1 - SLM_1 &= \frac{\sigma_X NL\left(\frac{r-E[X]}{\sigma_X}\right)}{Q} \\ NL\left(\frac{r-E[X]}{\sigma_X}\right) &= \frac{Q(1-SLM_1)}{\sigma_x} \end{aligned} \tag{3.27}$$

Ejemplo 8 *Una tienda vende en promedio 1000 procesadores de alimento cada año. Efectuar cada orden por procesadores de alimento cuesta $US\$50$. El lead time es un mes. Cuesta $US\$10$ mantener un procesador de alimento un año en inventario. La demanda anual por procesadores de alimento se distribuye normalmente con una desviación estándar de 9,28. Obtenga el punto de reorden para un SLM_1 de 80 % y 95 %.*

Considerando que $E[D] = 1000$, $c_o = 50$ y $c_h = 10$, se tiene:

$$Q = \sqrt{\frac{2 \times 50 \times 1000}{10}} = 100$$

Luego:

$$E[X] = \frac{1}{12}1000 = 83{,}33 \quad \text{y} \quad \sigma_x = \frac{69{,}28}{\sqrt{12}} = 20$$

Para obtener un SLM_1 de 80 % se debe cumplir:

$$NL\left(\frac{R - 83{,}33}{20}\right) = \frac{100(1 - 0{,}80)}{20} = 1$$

De acuerdo a la tabla de $NL(y)$ se observa que 1 excede cualquiera de los valores tabulados. Por lo tanto, $\frac{R-83{,}33}{20}$ debe ser negativo. Mediante prueba y error se obtiene: $NL(-0{,}9) = NL(0{,}9) + 0{,}9 = 1{,}004$, entonces:

$$\frac{R - 83{,}33}{20} = -0{,}9 \quad \rightarrow \quad R = 65{,}33$$

Si el SLM_1 es 95 %, el punto de reorden R debe satisfacer:

$$NL\left(\frac{R - 83{,}33}{20}\right) = \frac{100(1 - 0{,}95)}{20} = 0{,}25$$

De la tabla se obtiene: $NL(0{,}34) = 0{,}2518$, entonces:

$$\frac{R-83{,}33}{20}=0{,}34 \qquad \rightarrow \qquad R=90{,}13$$

3.2.2. Determinación del punto de reorden y el nivel de inventario de seguridad para el SLM_2

Supongamos que el administrador de un inventario desee mantener el stock suficiente para asegurar que en promedio s_0 ciclos por año terminen en stockout. Definiendo un punto de reorden R, una fracción $IP(X>R)$ de todos los ciclos terminarán en stockout. Si en promedio hay $\frac{E[D]}{Q}$ ciclos por año, entonces en promedio $\frac{IP(X>R)E[D]}{Q}$ terminarán en stockout. Entonces, dado s_0, el punto de reorden R es el menor valor que satisface:

$$\frac{IP(X>R)E[D]}{Q}\leq s_0 \quad \text{o} \quad IP(X>R)\leq\frac{s_0Q}{E[D]} \tag{3.28}$$

Si X es una variable aleatoria continua, entonces $IP(X>R)=IP(X\geq R)$. Entonces, se obtiene el punto de reorden R para el SLM_2 para una demanda durante el lead time continua según:

$$IP(X\geq R)=\frac{s_0Q}{E[D]} \tag{3.29}$$

El punto de reorden para un SLM_2 para una demanda durante el lead time discreta, se obtiene determinando el menor valor de R que satisface:

$$IP(X\geq R)\leq\frac{s_0Q}{E[D]} \tag{3.30}$$

Para ilustrar el empleo de las expresiones anteriores, supondremos que en el Ejemplo 8 se desea asegurar que los stockouts ocurran durante en promedio dos lead time por año. De acuerdo a los valores numéricos entregados se tiene:

$$\begin{aligned} IP\left(\frac{X-83{,}33}{20}\right)\geq\frac{R-83{,}33}{20}\Big) &= 0{,}2\\ IP\left(Z\geq\frac{R-83{,}33}{20}\right) &= 0{,}2 \end{aligned} \tag{3.31}$$

De la tabla normal estándar: $IP(Z\leq 0{,}84)=0{,}7995$ y $IP(Z\geq 0{,}84)=1-0{,}7995=0{,}2005$, entonces:

$$\frac{R-83{,}33}{20}=0{,}84 \qquad \rightarrow \qquad R=100{,}13 \tag{3.32}$$

Luego, el nivel de seguridad para tener en promedio dos stockouts por año debe ser $100{,}13-E[X]=16{,}8$.