Teoría de Colas

Investigación de Operaciones II

1er. Semestre 2004

1 Elementos de los procesos de colas

Los componenetes básicos de un sistema de colas son: Llegadas, Estructura de la Cola, Servicio.

1.1 Proceso de Entrada

En ciertas ocasiones los clientes llegan de acuerdo a una planificación previa, como es el caso de pedir hora para ir al dentista. En este caso se puede considerar el proceso de llegada con una condición determinística. Sin embargo, la mayor parte de los sistemas de colas son no deterministas. Con el objeto de estudiar sus características y poder definir sistemas de colas eficientes se requiere conocer sus distribuciones de probabilidades.
Una forma de identificar las distribuciones asociadas a los procesos de llegada es medir y contar cuántos clientes llegan y cada cuánto tiempo al sistema. Se sabe que si un proceso de llegada cumple con las siguientes condiciones de estacionario, independencia y orden el proceso de llegada puede ser modelado por una distribución Poisson. Estas condiciones son satisfechas en la mayoría de los sistemas de colas.

Orden: En cualquier instante de tiempo, a lo más un cliente llegará al servicio

Estacionario: Para un rango de tiempo, la probabilidad que un cliente llegará en un cierto intervalo de tiempo es el mismo para todos los intervalos de tiempo de igual largo

Independencia: Los clientes llegan de manera independiente entre ellos.

1.2 Llegadas

La teoría de colas se sustenta del supuesto qie las llegadas de clientes al sistema siguen un *Proceso Poisson*, esto significa que:

Si X_t = número de llegadas en un intervalo $t, X_t \sim \text{Poisson}(\lambda t)$, luego se trata de una variable aleatoria discreta con la siguiente probabilidad:

$$P(X_t = x) = \frac{(\lambda t)^x}{x!} e^{-\lambda t} \tag{1}$$

luego

$$E[X_t] = \lambda t \tag{2}$$

que representa el número promedio de ocurrencias en el intervalo t. y $\lambda = \frac{E[X_t]}{t}$ es el número promedio de ocurrencias por unidad de tiempo. Aqui λ es tasa media de llegada por unidad de tiempo. λ y t deben estar expresados en las mismas unidades de tiempo, por ejemplo $\frac{clientes}{hr}$ y hr.

1.3 Proceso de Servicio

Generalmente el tiempo de servicio corresponde a una variable aleatoria exponencial con función de densidad $f(x) = \mu e^{-\mu x}$, donde μ es el número promedio de clientes servidos por unidad de tiempo. Luego μ es la tasa media de servicio medida en clientes por hora, por día..etc. y $\frac{1}{\mu}$ es el tiempo medio de servicio. Si el tiempo medio de servicio es de 10 minutos, la tasa media de servicio es de $\frac{1}{10}$ por minuto, o 6 clientes por hora. Para una distribución exponencial el promedio del tiempo de servicio y la desviación standard es igual $\frac{1}{\mu}$. Usando la distribución exponencial se puede calcular la probabilidad que el tiempo de servicio, X, es menor que algún valor t por $P(X \leq t) = 1 - e^{-\mu t}$. μ y t deben estar expresdos en las mismas unidades de tiempo, si t está en hora μ debe estar en clientes por hora. Debe tener las mismas unidades de tiempo que λ.

1.4 Tiempo entre llegadas

Considerando que las llegadas siguen un proceso de Poisson, vamos a determinar cuál es la distribución del tiempo entre llegadas.

Sea T_1 el instante de tiempo de la primera llegada, y sea t un instante de tiempo menor. T_1 se puede interpretar como el tiempo necesario para que suceda una ocurrencua, luego

$$P(T_1 > t) = P(\text{Número de ocurrencias hasta } t \text{ sea } 0) \tag{3}$$

$$P(T_1 > t) = P(X_t = 0) = e^{-\lambda t} \tag{4}$$

Luego,

$$P(T_1 \leq t) = 1 - e^{-\lambda t} \tag{5}$$

La que corresponde a la función acumulada de una distribución exponencial, luego T_1 se distribuye $exp(\lambda)$

Analizando ahora el tiempo necesario hasta la segunda ocurrencia. Sea Y_t el número de ocurrencias en el intervalo $[T_1, T_2]$, con T un instante de tiempo dentro de ese intervalo. Luego,

$$P(T > t) = P(\text{no hay ocurrencias entre } T_1 \text{ y } T_1 + t\text{, es decir, durante el intervalo } t) \tag{6}$$

$$p(T > t) = P(X_t = 0) = e^{-\lambda t} \tag{7}$$

Asi $T \sim exp(\lambda)$.

1.5 Tiempo Acumulado

Idea: Si el Tiempo hasta la n-ésima ocurrencia es mayor que un tiempo t dado, implica que hasta t han ocurrido sólo $n-1$ courrencias.

$$P(T_n > t) = P(X_t \leq n-1) \tag{8}$$

$$P(T_n > t) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^i e^{\lambda t}}{i!} \tag{9}$$

Aproximando la sumatoria por la integral se obtiene que $T_n \sim \Gamma(n, \lambda^{-1})$. Recordemos que una distribución exponencial con parámetro λ es equivalente a una distribución Γ con parámetros $(1, \lambda^{-1})$

1.6 Resumen

Los Modelos de Colas tienen los siguientes supuestos:

- Proceso de Nacimiento Puro: Los clientes llegan y no abandonan
- Si las llegadas siguen un proceso de poisson, esto implica que:
  1. La probabilidad de una ocurrencia entre t, y $t+h$ sólo depende del ancho del intervalo h
  2. Con h muy pequeño a lo más puede ocurrir una llegada en el intervalo $(t, t+h)$.
- Disciplina FIFO
- Número de Ocurrencias se distribuye Poisson parámetro λt, con λ igual a la tasa de llegada por unidad de tiempo.
- Tiempo entre llegadas se distribuye exponencial con parámetro λ.
- Tiempo hasta la n-ésima llegada se distribuye Γ con parámetros $(n, \frac{1}{\lambda})$.

Lo presentado anteriormente se refiere al proceso de la cola misma. Ahora vamos a analizar el proceso de salida.

2 Proceso de Salida

Supuestos:

- Fallecimiento Puro: No pueden reingresar al sistema
- Tasa de salida $= \mu =$ Número de clientes servidos por unidad de tiempo

2.1 Tiempo de Servicio

Si Z es el tiempo de servicio, $Z \sim exp(\mu)$

2.2 Número de Unidades Servidas durante t

Sea Y_t el número de unidades servidas durante t, luego $Y_t \sim \mathrm{P}oisson(\mu t)$.

3 Estado Estacionario

En estado estacionario las medidas de interés de la performance del sistema a calcular son:

- Utilización del servidor
- Probabilidad de cero clientes en el sistema
- Probabilidad de n clientes en el sistema
- Número promedio en el sistema
- Número promedio en la cola
- Tiempo promedio de espera en la cola
- Tiempo promedio en el sistema
- Probabilidad de que una unidad tenga que esperar por servicio

4 Estructura de los Sistemas de Colas

En un sistema de colas se distinguen básicamente los siguientes componentes:

- Población
- Clientes
- Política de Formación de la cola
- Disciplina de Servicio
- Facilidades del Servicio

4.1 Clasificación de los Sistemas de Colas

La nomenclatura de un sistema de colas tiene la siguiente forma:
(Llegada / Servicio / Número de servidores / Tamaño de la Población / Largo de la Cola) : Ej: (M/M/1/I/I)

Abreviaciones con supuesto FIFO:

M	Llegada Poisson, Servicio Exponencial
D	Determinística constante, llegada o servicio
K	Distribución Erlang del tiempo entre llegadas o servicio
GI	Cualquier distribución con tiempos entre llegadas independientes
G	Cualquier distribución del tiempo de servicio
S	Cualquier número de servidores
I	Infinito largo cola /población
F	Finito largo cola /población