Fundamentos de Investigación de Operaciones
Asignación y Vendedor Viajero

23 de mayo de 2004

Si bien la resolución del problema de transporte mediante tableau parece ser muy expedita, existen ciertos tipos de problemas de transporte, para los cuales el método no es eficiente. Estos problemas son los llamados Problemas de Asignación.

1. Formulación del Problema de Asignación

A modo de ejemplo, construyamos el modelo de programación lineal para el siguiente problema.

Ejemplo 1 *Una fábrica dispone de cuatro obreros para completar cuatro trabajos. Cada obrero sólo puede hacer uno de los trabajos. El tiempo que requiere cada obrero para completar cada trabajo se entrega en el Cuadro 1.1.*

	Tiempo (Horas)			
	Trabajo 1	Trabajo 2	Trabajo 3	Trabajo 4
Obrero 1	14	5	8	7
Obrero 2	2	12	6	5
Obrero 3	7	8	3	9
Obrero 4	2	4	6	10

Cuadro 1.1: Tiempos requeridos por obreros

La fábrica desea minimizar el tiempo total dedicado a los cuatro trabajos. Formule y resuelva un modelo que determine la mejor asignación de los obreros.

En primer lugar debemos definir las variables de decisión necesarias para representar las posibles alternativas de asignación. Evidentemente, de acuerdo a la naturaleza del problema conviene emplear variables binarias. Sea:

$$x_{ij} = \text{asignación de obrero } i \text{ a trabajo } j \tag{1.1}$$

La variable binaria x_{ij} valdrá 1 si se asigna al obrero i al trabajo j y 0 en caso contrario.

Por lo tanto, la formulación del problema queda:

$$
\begin{array}{llll}
\text{mín} & \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} & & \\
\text{s.t.} & & & \\
\sum_{j=1}^{j=4} x_{ij} = 1 & (i = 1\ldots 4) & & \text{(Restricciones de obreros)} \\
\sum_{i=1}^{i=4} x_{ij} = 1 & (j = 1\ldots 4) & & \text{(Restricciones de trabajos)} \\
x_{ij} = \{0,1\} & (i = 1\ldots 4;\ j = 1\ldots 4) & & \text{(Variables binarias)}
\end{array}
\tag{1.2}
$$

Donde c_{ij} representa el costo (tiempo) de la asignación del obrero i al trabajo j. Las restricciones de trabajos obligan a que todo trabajo deba ser asignado a un obrero. Las restricciones de obreros imponen que sólo puede ser asignado un trabajo a cada obrero.

Olvidando la naturaleza de las variables, podemos decir que el problema anterior es un problema de transporte balanceado donde cada punto de oferta entrega una unidad y cada punto de demanda requiere una unidad. En general, un **problema de asignación** es un problema de transporte balanceado con oferta y demanda igual a 1.

Se puede demostrar que como las ofertas y demandas tienen valores numéricos enteros, la solución óptima debe corresponder a un conjunto de valores enteros. Como a la derecha de cada restricción se tiene un 1, los únicos valores posibles para las variables son 1 y 0. Luego, podemos olvidarnos de la condición de que las variables deben ser enteras y resolver el problema mediante un tableau de transporte. Siguiendo ese camino, se obtiene el Cuadro 1.2.

	Trabajo 1	Trabajo 2	Trabajo 3	Trabajo 4	Oferta
	14	5	8	7	
Obrero 1		1		0	1
	2	12	6	5	
Obrero 2				1	1
	7	8	3	9	
Obrero 3			1		1
	2	4	6	10	
Obrero 4	1	0	0		1
Demanda	1	1	1	1	

Cuadro 1.2: Tableau de Transporte para el Ejemplo 1

Por lo tanto, se asigna el obrero 1 al trabajo 2, el 2 al 4, el 3 al 3 y el 4 al 1, incurriendo en un tiempo total de $5 + 5 + 3 + 2 = 15$ horas.

2. Método Húngaro

2.1. Descripción

En general, el método Simplex para problemas de transporte es poco eficiente para resolver problemas de asignación, especialmente en problemas de gran tamaño. Por ello, para resolver problemas de asignación (minimización) se emplea normalmente el *Método Húngaro*. La principal ventaja es que el método húngaro es considerablemente más simple que el método Simplex del problema de transporte.

Para aplicar el método se deben seguir los siguientes pasos:

Paso 1 *Determine el menor elemento en cada fila de la matriz de costos* $(m \times m)$. *Construya una nueva matriz restando a cada costo el costo menor de esa fila. A continuación determine el costo mínimo en cada columna de la matriz resultante. Construya una nueva matriz (matriz de costos reducidos) restando a cada costo el menor costo de esa columna.*

Paso 2 *Trace el número mínimo de líneas (horizontales o verticales) que son necesarias para cubrir todos los ceros de la matriz reducida. Si se requieren* m *líneas, los ceros de la matriz reducida indican la asignación óptima. Si se requieren menos de* m *líneas, siga al Paso 3.*

Paso 3 *Determine el menor costo de la matriz reducida que no está tarjado por las líneas del Paso 2. Sea dicho costo* k. *Luego, reste a todos los coeficientes no tarjados el valor* k *y sume a todos los coeficientes tarjados por dos líneas el valor* k. *Vuelva al Paso 1.*

El método Húngaro resuelve un problema de minimización a partir de una matriz de costos cuadrada. Sin embargo, haciendo algunas modificaciones puede ser más versátil:

1. Para resolver un problema de asignación cuyo objetivo es maximizar la función objetivo, multiplique la matriz de costos por -1 y resuelva el problema de minimización.

2. Si el número de filas y columnas en la matriz de costos no son iguales, el problema de asignación no está balanceado. Similarmente al problema de transporte, balancee la matriz agregando filas o columnas artificiales según corresponda. Los costos de las filas o columnas artificiales deben ser idénticos para todas las combinaciones de forma de no generar preferencias.

3. Si se puede hacer una asignación más de una vez, repita la fila o columna según corresponda cuantas veces sea necesario. Balancee el problema.

2.2. Ejemplo de Resolución

A continuación se resuelve el problema del ejemplo mediante el Método Húngaro.

En primer lugar se busca el mínimo por filas en la matriz de costos.

				Mínimo por fila
14	5	8	7	5
2	12	6	5	2
7	8	3	9	3
2	4	6	10	2

Luego se resta el valor determinado en cada fila y se busca el mínimo por columna:

	9	0	3	2
	0	10	4	3
	4	5	0	6
	0	2	4	8
Mínimo por columna	0	0	0	2

Se resta el menor costo por columna y se trazan el menor número de líneas que cubran todos los ceros de la matriz de costos reducida:

9	0	3	0
0	10	4	1
4	5	0	4
0	2	4	6

Luego, de los coeficientes no tarjados el menor es 1. Restamos a todos los no tarjados 1 y sumamos 1 a los tarjados dos veces. Volvemos a trazar el número mínimo de líneas que cubran todos los ceros.

10	0	3	0
0	9	3	0
5	5	0	4
0	1	3	5

Como el número de líneas trazadas es igual a la dimensión de la matriz se ha encontrado el óptimo. Para interpretar la asignación debemos buscar aquellas filas y columnas que posean un único cero. Por ejemplo, la fila y columna 3 posee un único 0, luego $x_{33} = 1$. Por otro lado, la segunda columna posee un único cero en la primera fila, luego $x_{12} = 1$.

10	$\boxed{0}$	3	0
0	9	3	0
5	5	$\boxed{0}$	4
0	1	3	5

Luego, el cero de la primera fila y cuarta columna puede ser descartado pues ya existe una asignación obligatoria en la primera fila. De esta forma, el único cero restante en la cuarta columna es el de la segunda fila, por lo tanto $x_{24} = 1$.

10	$\boxed{0}$	3	$\cancel{0}$
0	9	3	$\boxed{0}$
5	5	$\boxed{0}$	4
0	1	3	5

A continuación se puede descartar el cero de la segunda fila y la primera columna pues ya existe una asignación obligatoria en esa fila. Finalmente, en la primera columna y cuarta fila sólo queda un cero, luego $x_{41} = 1$.

10	$\boxed{0}$	3	$\cancel{0}$
$\cancel{0}$	9	3	$\boxed{0}$
5	5	$\boxed{0}$	4
$\boxed{0}$	1	3	5

El resultado verifica la solución obtenida mediante el tableau de transporte.

2.3. Justificación Intuitiva del Método Húngaro

Para entregar una justificación intuitiva de cómo trabaja el Método Húngaro, es necesario discutir el siguiente resultado: *Si se suma una constante a cada costo de una fila o de una columna de un problema de transporte balanceado, la solución al problema es invariante.* Para mostrar que el resultado es correcto, supongamos que se agrega una constante k a cada costo en la primera fila del ejemplo en estudio. Entonces:

$$\text{Nuevo valor de la función objetivo} = \text{valor anterior} + k(x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14})$$

$$\text{Como cualquier solución factible del problema debe cumplir que: } x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1$$

$$\text{Nuevo valor de la función objetivo} = \text{valor anterior} + k$$

Debido a que minimizar el valor de una función más una constante es equivalente a minimizar la función, la solución óptima no cambia si se agrega una constante k a cada costo de la primera fila. Se puede aplicar el mismo argumento a cualquier otra fila o columna.

El paso 1 del Método Húngaro consiste (para cada fila y columna) en restar una constante a cada elemento de la fila o columna. Entonces, el paso 1 crea una nueva matriz de costos que posee la misma solución óptima que el problema original. El paso 3 del método es equivalente a sumar k a cada costo de una fila tarjada y restar k a cada costo de las columnas no tarjadas (o viceversa). Por lo tanto, el paso 3 también crea una nueva matriz con la misma solución óptima que la matriz original. Cada vez que se realiza el paso 3, se crea al menos un nuevo cero en la matriz de costos.

Los pasos 1 y 3 también aseguran que todos los costos sean no negativos. En suma, el efecto neto de los pasos 1 y 3 del Método Húngaro es crear una secuencia de problemas de asignación (con costos no negativos) tal que todos ellos poseen la misma solución óptima al problema de asignación original.

Luego, considerando un problema de asignación con costos no negativos, cualquier asignación factible para la cual todos los x_{ij} iguales a 1 tienen un costo asociado nulo, deben ser una solución óptima. Por lo tanto, cuando el paso 2 indica que se requieren m líneas para cubrir todos los ceros de la matriz, se ha encontrado una solución óptima para el problema original.

2.4. Ejemplos Adicionales

Ejercicio 1 *Una constructora debe contratar obreros para realizar* 4 *trabajos. Existen* 3 *obreros disponibles para ejecutar dichas labores. El monto (en miles de pesos) cobrado por cada obrero para realizar cada trabajo se indica en el Cuadro 2.1.*

	Trabajos			
	1	2	3	4
Obrero 1	50	46	42	40
Obrero 2	51	48	44	-
Obrero 3	-	47	45	45

Cuadro 2.1: Montos para realizar trabajos

El obrero 1 *tiene disponibilidad para ejecutar sólo un trabajo. Los obreros* 2 *y* 3 *pueden ejecutar hasta dos trabajos. Determine la asignación que minimiza los costos de ejecutar los cuatro trabajos.*

Como los obreros 2 y 3 pueden realizar hasta dos trabajos, repetiremos una vez las filas dos y tres. Así, la matriz queda de 5 filas. Luego, cuadramos la matriz agregando una columna ficticia. Los costos de dicha columna deben ser idénticos para no generar preferencias, por simplicidad emplearemos el cero. Luego, la matriz de costos queda (las M indican asignación imposible):

$$\begin{array}{|ccccc|}\hline 50 & 46 & 42 & 40 & 0 \\ 51 & 48 & 44 & M & 0 \\ 51 & 48 & 44 & M & 0 \\ M & 47 & 45 & 45 & 0 \\ M & 47 & 45 & 45 & 0 \\ \hline\end{array}$$

Restando por filas la matriz no cambia, pues en cada fila hay un cero. Restando por columnas se obtiene:

$$\begin{array}{|ccccc|}\hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & M & 0 \\ 1 & 2 & 2 & M & 0 \\ M & 1 & 3 & 5 & 0 \\ M & 1 & 3 & 5 & 0 \\ \hline\end{array}$$

Luego, se obtiene que el mínimo de líneas para cubrir todos los ceros es 2. El menor valor no tarjado es 1.

$$\begin{array}{|ccccc|}\hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & M & 0 \\ 1 & 2 & 2 & M & 0 \\ M & 1 & 3 & 5 & 0 \\ M & 1 & 3 & 5 & 0 \\ \hline\end{array}$$

Restamos a los coeficientes no tarjados el 1 y se los sumamos a los tarjados dos veces. Volvemos a identificar el número mínimo de líneas y al menor valor no tarjado:

$$\begin{array}{|ccccc|}\hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & M & 0 \\ 0 & 1 & 1 & M & 0 \\ M & 0 & 2 & 4 & 0 \\ M & 0 & 2 & 4 & 0 \\ \hline\end{array}$$

En este caso el número mínimo de líneas para cubrir todos los ceros es 5, por lo que se está en el óptimo. De la cuarta columna podemos asignar inmediatamente un cero, descartando el de la primera fila:

$$\begin{array}{|ccccc|}\hline 1 & 1 & \cancel{0} & \boxed{0} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & M & 0 \\ 0 & 1 & 0 & M & 0 \\ M & 0 & 1 & 3 & 0 \\ M & 0 & 1 & 3 & 0 \\ \hline\end{array}$$

A continuación, ni por filas ni por columnas existe un único cero, por lo que pueden existir soluciones alternativas. Arbitrariamente asignaremos un cero en la primera celda de la segunda fila, lo que obliga a hacer otras asignaciones:

$$
\begin{array}{|ccccc|}
\hline
1 & 1 & \cancel{0} & \boxed{0} & 2 \\
\boxed{0} & 1 & \cancel{0} & M & \cancel{0} \\
\cancel{0} & 1 & \boxed{0} & M & \cancel{0} \\
M & 0 & 1 & 3 & 0 \\
M & 0 & 1 & 3 & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

Para completar la asignación volvemos a asignar arbitrariamente el cero de la cuarta fila y la segunda columna:

$$
\begin{array}{|ccccc|}
\hline
1 & 1 & \cancel{0} & \boxed{0} & 2 \\
\boxed{0} & 1 & \cancel{0} & M & \cancel{0} \\
\cancel{0} & 1 & \boxed{0} & M & \cancel{0} \\
M & \boxed{0} & 1 & 3 & \cancel{0} \\
M & \cancel{0} & 1 & 3 & \boxed{0} \\
\hline
\end{array}
$$

Por lo tanto, la asignación queda:

$$
\begin{array}{lcl}
\text{Obrero 1} & \rightarrow & \text{Trabajo 4} \\
\text{Obrero 2} & \rightarrow & \text{Trabajo 1 y 3} \\
\text{Obrero 3} & \rightarrow & \text{Trabajo 2}
\end{array}
$$

Buscando las otras asignaciones alternativas, se repite la misma solución óptima.

Ejercicio 2 *Para participar en el próximo campeonato de bridge, el Club universitario debe enviar un equipo de* 4 *personas. Hay seis jugadores disponibles, cuyos rendimientos relativos en cada una de las posiciones se indican en el Cuadro 2.2. Determine el mejor equipo que se podría enviar al campeonato.*

	N	E	S	O
Juan	8	5	8	5
Pedro	7	4	2	6
Raúl	5	4	7	5
Sergio	3	2	4	4
Arturo	4	5	4	4
Carlos	8	3	7	4

Cuadro 2.2: Rendimientos de los jugadores

En este caso interesa maximizar el rendimiento del equipo, por lo tanto se debe plantear como un problema de maximización. Dado que el Método Húngaro sólo minimiza, multiplicaremos por -1 la matriz de ganancias. Además, agregaremos dos columnas artificiales para cuadrar la matriz, luego la matriz de costos queda:

$$
\begin{array}{|cccccc|}
\hline
-8 & -5 & -8 & -5 & 0 & 0 \\
-7 & -4 & -2 & -6 & 0 & 0 \\
-5 & -4 & -7 & -5 & 0 & 0 \\
-3 & -2 & -4 & -4 & 0 & 0 \\
-4 & -5 & -4 & -4 & 0 & 0 \\
-8 & -3 & -7 & -4 & 0 & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

A continuación se resta el mínimo costo por filas y por columnas y se busca el número mínimo de líneas que cubran todos los ceros:

$$
\begin{array}{|cccccc|}
\hline
0 & 3 & 0 & 3 & 4 & 4 \\
0 & 3 & 5 & 1 & 3 & 3 \\
2 & 3 & 0 & 2 & 3 & 3 \\
1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 5 & 1 & 4 & 4 & 4 \\
\hline
\end{array}
$$

Restando 1 a las celdas no tarjadas y sumándoselo a las tarjadas dos veces se obtiene el siguiente tableau. Se vuelve a buscar el número mínimo de líneas que cubran todos los ceros y se identifica el coeficiente menor no tarjado:

$$
\begin{array}{|cccccc|}
\hline
0 & 2 & 0 & 2 & 3 & 3 \\
0 & 2 & 5 & 0 & 2 & 2 \\
2 & 2 & 0 & 1 & 2 & 2 \\
2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 4 & 1 & 3 & 3 & 3 \\
\hline
\end{array}
$$

Se vuelve a aplicar el método a la matriz siguiente:

$$
\begin{array}{|cccccc|}
\hline
0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 \\
0 & 2 & 5 & 0 & 1 & 1 \\
2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
3 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 4 & 1 & 3 & 2 & 2 \\
\hline
\end{array}
$$

En la nueva matriz de costos no es posible trazar un número inferior a 6 líneas para cubrir todos los ceros, luego se ha alcanzado el óptimo. A continuación se procede a asignar:

$$
\begin{array}{|cccccc|}
\hline
\cancel{0} & 1 & \boxed{0} & 2 & 1 & 1 \\
\cancel{0} & 1 & 5 & \boxed{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\
2 & 1 & \cancel{0} & 1 & 0 & 0 \\
4 & 3 & 3 & 2 & 0 & 0 \\
3 & \boxed{0} & 3 & 2 & \cancel{0} & \cancel{0} \\
\boxed{0} & 3 & 1 & 3 & 1 & 1 \\
\hline
\end{array}
$$

Si bien en el tableau anterior, la tercera y cuarta fila (o quinta y sexta columna) no están asignadas, las dos opciones de asignación posibles representan que Raúl y Sergio no integrarán el equipo. Luego:

$$
\begin{array}{lcll}
\text{Juan} & \rightarrow & \text{S} & 8 \\
\text{Pedro} & \rightarrow & \text{O} & 6 \\
\text{Arturo} & \rightarrow & \text{E} & 5 \\
\text{Carlos} & \rightarrow & \text{N} & 8 \\
\cline{4-4}
 & & & 27
\end{array}
$$

Por lo tanto, la asignación óptima tiene un rendimiento esperado de 27.

	Simplet	Grincheux	Dormeur	Atchoum	Prof
Agassi	0,2	0,3	0,1	0,4	0,5
Sampras	0,1	0,4	0,2	0,3	0,5
Kuerten	0,1	0,4	0,2	0,5	0,3

Cuadro 2.3: Probabilidad de ganar de cada tenista

Ejercicio 3 *Se está organizando un torneo de tenis en donde se deben jugar* 5 *partidos. Se cuenta con* 3 *tenistas: Agassi, Sampras y Kuerten. Cada uno debe jugar al menos un partido. La tabla 2.3 muestra la probabilidad de ganar de cada tenista dependiendo de su rival.*

Se pide determinar la mejor estrategia para ganar el torneo.

3. El Problema del Vendedor Viajero

3.1. Descripción General

El problema del Vendedor viajero pertenece a la familia de problemas de optimización combinatoria, es decir, problemas que poseen un conjunto finito de soluciones factibles.

En términos generales, el problema del vendedor viajero consiste en determinar cómo se debe recorrer la totalidad de un conjunto de puntos, sin pasar dos veces por un mismo lugar, volviendo al punto desde donde se partió, minimizando el camino total recorrido. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 2 *El propietario de una pequeña cadena de almacenes visita una vez al mes todas sus tiendas. El dueño de los almacenes vive en la Ciudad* 1*. Las distancias (km) entre las ciudades donde se ubican sus almacenes se entrega en el Cuadro 3.1. ¿ Qué recorrido debe seguir para minimizar la distancia total recorrida ?*

	Ciudad 1	Ciudad 2	Ciudad 3	Ciudad 4	Ciudad 5
Ciudad 1	0	132	217	164	58
Ciudad 2	132	0	290	201	79
Ciudad 3	217	290	0	113	303
Ciudad 4	164	201	113	0	196
Ciudad 5	58	79	303	196	0

Cuadro 3.1: Distancias entre ciudades

Claramente, se debe determinar el orden en que se deben recorrer las 5 ciudades partiendo desde la ciudad 1. En primer lugar, formularemos un modelo de programación lineal entera.

Supongamos que se deben visitar las ciudades $1, 2, 3, \ldots N$. Para todo $i \neq j$ se tiene c_{ij} = distancia desde la ciudad i a la ciudad j, se $c_{ii} = M$, donde M es un número muy grande en relación a las distancias del problema. Definamos:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{la solución indica ir desde la ciudad } i \text{ a la } j \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \tag{3.1}$$

En forma alternativa simplemente se puede eliminar las variables x_{ii} del modelo para evitar las asignaciones no deseadas. De acuerdo a las variables definidas, el modelo de programación lineal queda:

$$\begin{array}{llcll}
\text{Min} & \sum_{i=1} \sum_{j=1} c_{ij} x_{ij} & & & (a) \\
& & & & \\
\text{st} & & & & \\
& \sum_{i=1}^{i=N} x_{ij} = & 1 & (j = 1 \ldots N) & (b) \\
& \sum_{j=1}^{j=N} x_{ij} = & 1 & (i = 1 \ldots N) & (c) \\
& u_i - u_j + N x_{ij} \leq & N-1 & (i \neq j;\ i = 2 \ldots N;\ j = 2 \ldots N) & (d) \\
& x_{ij} = & \{0, 1\} & (i = 1 \ldots N;\ j = 1 \ldots N) & \\
& u_j \geq & 0 & (j = 1 \ldots N) &
\end{array} \tag{3.2}$$

La función objetivo (a) refleja la longitud total del camino recorrido. Las restricciones (b) aseguran que se llegue sólo una vez a cada ciudad. Las restricciones (c) aseguran que se parta desde cada ciudad. Las restricciones (d) son las fundamentales, ellas aseguran que:

1. Cualquier conjunto de valores de x_{ij} que conformen un **subtour** no sean soluciones factibles.

2. Cualquier conjunto de valores de x_{ij} que conformen un **tour** sea una solución factible.

Llamaremos **tour** a cualquier camino que satisfaga todas las condiciones del problema del vendedor viajero, es decir, pase por todos los puntos sin repetir, comience y termine en el mismo punto. En el ejemplo, un tour podría ser: $1-3-4-5-2-1$, con una distancia total recorrida de: $217+113+196+79+132=737$ [km].

Un **subtour** es un camino cerrado, que comienza y termina en la misma ciudad, pero que no pasa por todas las ciudades. En el ejemplo, un subtour podría ser $1-5-2-1$.

Para ilustrar el funcionamiento del modelo, supongamos que se tiene como solución al problema del ejemplo $x_{15}=x_{21}=x_{34}=x_{43}=x_{52}=1$. Esta asignación contiene 2 subtours: $1-5-2-1$ y $3-4-3$. Si escogemos el subtour que no contiene a la Ciudad 1 (3-4-3) y escribimos las restricciones (d) correspondiente a estas asignaciones se obtiene:

$$u_3-u_4+5x_{34}\leq 4 \quad \text{y} \quad u_4-u_3+5x_{43}\leq 4 \tag{3.3}$$

Sumando ambas restricciones se obtiene:

$$5(x_{34}+x_{43})\leq 8 \tag{3.4}$$

La restricción anterior no se puede satisfacer para la combinación $x_{43}=x_{34}=1$, por lo tanto el subtour $3-4-3$ no es una solución factible para el modelo de programación lineal. Se puede verificar que las restricciones (d) son violadas por cualquier subtour posible.

Supongamos ahora que la Ciudad 1 fue la primera visitada. Consideremos: $t_i=$ posición en el tour cuando la ciudad i es visitada. Luego, si $u_i=t_i$ cualquier tour satisface las restricciones (d). A modo de ejemplo, consideremos el tour $1-3-4-5-2-1$. Entonces, las otras variables son: $u_1=1$, $u_2=5$, $u_3=2$, $u_4=3$ y $u_5=4$. Consideremos ahora cualquier restricción (d) que contenga un $x_{ij}=1$. Por ejemplo, la restricción correspondiente a x_{52} es:

$$u_5-u_2+5x_{52}\leq 4 \tag{3.5}$$

Como la Ciudad 2 es la que sigue inmediatamente a la Ciudad 5 se tiene:

$$u_5-u_2=-1 \tag{3.6}$$

Por lo tanto, la restricción (d) de x_{52} se satisface ya que:

$$-1+5\leq 4 \tag{3.7}$$

Consideremos ahora una restricción correspondiente a un $x_{ij}=0$, por ejemplo x_{32} de acuerdo al tour escogido. La restricción de x_{32} queda:

$$u_3-u_2+5x_{32}\leq 4 \quad \rightarrow \quad u_3-u_2\leq 4 \tag{3.8}$$

Como las variables u_i representan la posición en el tour, se tiene que $u_i\leq 5$ y $u_i>1$ $(i=2,\ldots N)$. En este caso:

$$\left.\begin{array}{l} u_3\leq 5 \\ u_2>1 \end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad u_3-u_2\leq 5-2=3 \tag{3.9}$$

Por lo tanto, las restricciones (d) para las variables $x_{ij} = 0$ también se satisfacen cuando las variables contienen un tour.

Luego, el modelo efectivamente elimina cualquier secuencia de N ciudades que comiencen en la Ciudad 1 y que contengan un subtour. Por lo tanto, el modelo resuelve el problema del Vendedor Viajero. Evidentemente, el modelo crece rápidamente según aumente el número de ciudades incluidas en el problema, por lo tanto tiende a ser poco eficiente.

Para el problema del ejemplo, el modelo en LINDO queda:

```
min
132 x12 + 217 x13 + 164 x14 + 58 x15 + 132 x21 + 290 x23 + 201
x24 + 79 x25 + 217 x31 + 290 x32 + 113 x34 + 303 x35 + 164 x41 +
201 x42 + 113 x43 + 196 x45 + 58 x51 + 79 x52 + 303 x53 + 196 x54
st
x12 + x13 + x14 + x15 = 1
x21 + x23 + x24 + x25 = 1
x31 + x32 + x34 + x35 = 1
x41 + x42 + x43 + x45 = 1
x51 + x52 + x53 + x54 = 1
x21 + x31 + x41 + x51 = 1
x12 + x32 + x42 + x52 = 1
x13 + x23 + x43 + x53 = 1
x14 + x24 + x34 + x54 = 1
x15 + x25 + x35 + x45 = 1
u2 - u3 + 5 x23 <= 4
u2 - u4 + 5 x24 <= 4
u2 - u5 + 5 x25 <= 4
u3 - u2 + 5 x32 <= 4
u3 - u4 + 5 x34 <= 4
u3 - u5 + 5 x35 <= 4
u4 - u2 + 5 x42 <= 4
u4 - u3 + 5 x43 <= 4
u4 - u5 + 5 x45 <= 4
u5 - u2 + 5 x52 <= 4
u5 - u3 + 5 x53 <= 4
u5 - u4 + 5 x54 <= 4
end
int x12
int x13
int x14
int x15
int x21
int x23
int x24
int x25
int x31
int x32
int x34
int x35
```

```
int x41
int x42
int x43
int x45
int x51
int x52
int x53
int x54
```

La instrucción **int xij** de LINDO permite definir como variable binaria a **xij**. Al resolver el modelo con LINDO, luego de una serie de iteraciones se obtiene:

```
LAST INTEGER SOLUTION IS THE BEST FOUND
 RE-INSTALLING BEST SOLUTION...

        OBJECTIVE FUNCTION VALUE

        1)      668.0000

  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
       x12         0.000000        132.000000
       x13         0.000000        217.000000
       x14         0.000000        164.000000
       x15         1.000000         58.000000
       x21         0.000000        132.000000
       x23         0.000000        290.000000
       x24         1.000000        201.000000
       x25         0.000000         79.000000
       x31         1.000000        217.000000
       x32         0.000000        290.000000
       x34         0.000000        113.000000
       x35         0.000000        303.000000
       x41         0.000000        164.000000
       x42         0.000000        201.000000
       x43         1.000000        113.000000
       x45         0.000000        196.000000
       x51         0.000000         58.000000
       x52         1.000000         79.000000
       x53         0.000000        303.000000
       x54         0.000000        196.000000
        u2         1.000000          0.000000
        u3         4.000000          0.000000
        u4         2.000000          0.000000
        u5         0.000000          0.000000
```

Por lo tanto, el óptimo encontrado corresponde al tour $1 \to 5 \to 2 \to 4 \to 3 \to 1$ con una distancia total a recorrer de 668. La solución encontrada no es única, ya que el modelo podría también haber entregado la misma secuencia en sentido inverso.

Si bien el planteo anterior permite resolver el problema mediante Simplex, existe un método más simple que permite resolver el problema manualmente a través una combinación del Método Húngaro y la técnica de Ramificación y Acotamiento (Branch-and-Bound).

3.2. Resolución del Problema del Vendedor Viajero

A continuación se resolverá el problema del Vendedor Viajero como un problema de asignación. Para ello construiremos una matriz de costos, donde se incluyan las distancias c_{ij} $(i \neq j)$ desde cada ciudad i a cada ciudad j. Además, incluiremos en la diagonal de la matriz de costos $c_{ii} = M$ $(i = 1 \ldots N)$, para evitar la asignación de una ciudad a si misma como se muestra en el Cuadro 3.2.

M	132	217	164	58
132	M	290	201	79
217	290	M	113	303
164	201	113	M	196
58	79	303	196	M

Cuadro 3.2: Matriz de Costos del Problema Original

La resolución del problema anterior como un problema de asignación constituye una **relajación** del problema original, ya que no incorpora restricciones adicionales para evitar que en la asignación aparezcan subtours. De todas maneras, si la solución del problema de asignación constituye un tour, también será solución al problema del vendedor viajero. Resolviendo, se obtiene la matriz reducida del problema original (Cuadro 3.3).

M	0	106	53	0
0	M	158	69	0
104	156	M	$\boxed{0}$	243
51	67	$\boxed{0}$	M	136
0	0	245	138	M

Cuadro 3.3: Matriz de Costos Reducida

Si bien el Cuadro 3.3 presenta dos soluciones alternativas, se verifica que una es hacer el recorrido en el sentido opuesto a a la otra. La asignación es: $1 \to 2 \to 5 \to 1$ y $3 \to 4 \to 3$, con un largo total: $z = 132 + 79 + 58 + 113 + 113 = 495$. La solución contiene dos subtours, por lo tanto no es óptima. A continuación se procede a ramificar *rompiendo* el subtour de menor longitud, es decir, resolveremos dos suproblemas:

Subproblema 1 *Se impone* $3 \not\to 4$*, es decir,* $x_{34} = 0$ *y* $c_{34} = M$ *sobre el problema original.*

Subproblema 2 *Se impone* $4 \not\to 3$*, es decir,* $x_{43} = 0$ *y* $c_{43} = M$ *sobre el problema original.*

Luego, podemos comenzar a construir el árbol de ramificación (Figura 3.1).

Para resolver el Subproblema 1 incorporamos una M al Cuadro 3.3 y aplicamos el Método Húngaro a la nueva matriz (Cuadro 3.4).

Se resta el menor valor por filas y luego por columnas. Buscando el número menor de líneas que cubran todos los ceros se determina que se está en el óptimo (Cuadro 3.5). Luego se asigna y se verifica

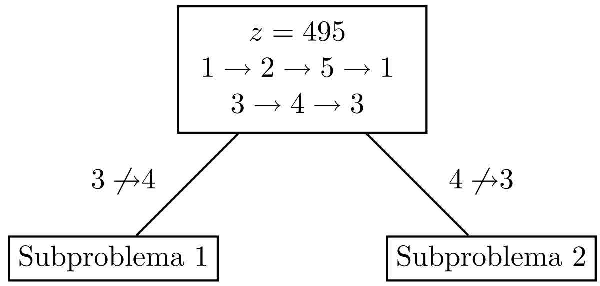

Figura 3.1: Árbol de Ramificación

M	0	106	53	0
0	M	158	69	0
104	156	M	M	243
51	67	0	M	136
0	0	245	138	M

Cuadro 3.4: Matriz de Costos Subproblema 1

si la asignación corresponde a un tour.

M	0	106	$\boxed{0}$	$\emptyset$
$\emptyset$	M	158	16	$\boxed{0}$
$\boxed{0}$	52	M	M	139
51	67	$\boxed{0}$	M	136
$\emptyset$	$\boxed{0}$	245	85	M

Cuadro 3.5: Matriz Final Subproblema 1

Luego, el Subproblema 1 genera como solución los subtours $1 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ y $2 \rightarrow 5 \rightarrow 2$, con un largo total: $z = 164+113+217+79+79 = 652$. Por lo tanto, la solución obtenida tampoco es factible. Antes de volver a ramificar debemos verificar que solución entrega la otra rama (Subproblema 2). En caso que dicha rama tampoco genere una solución factible, deberemos escoger aquel Subproblema con menor valor de función objetivo y volver a ramificar.

Para resolver el Subproblema 2 incorporamos al Cuadro 3.3 una M en la asignación $4 \rightarrow 3$ (Cuadro 3.6). Luego restamos el menor valor por fila y luego por columna. Nuevamente, el número menor de líneas que cubran todos los ceros es 5 por lo tanto se está en el óptimo y se procede a asignar.

La asignación obtenida corresponde a la secuencia $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ y $2 \rightarrow 5 \rightarrow 2$, con un largo total: $z = 217 + 113 + 164 + 79 + 79 = 652$ (Cuadro 3.7). La solución encontrada tampoco es un tour. Como el camino obtenido por ambas ramas es de idéntica longitud, escogeremos arbitrariamente abrir la rama de la izquierda. En este caso, interrumpiremos el subtour $2 \rightarrow 5 \rightarrow 2$, es decir generamos los

M	0	106	53	0
0	M	158	69	0
104	156	M	0	243
51	67	M	M	136
0	0	245	138	M

Cuadro 3.6: Matriz de Costos Subproblema 2

M	$\emptyset$	$\boxed{0}$	53	$\emptyset$
$\emptyset$	M	52	69	$\boxed{0}$
104	156	M	$\boxed{0}$	243
$\boxed{0}$	16	M	M	85
$\emptyset$	$\boxed{0}$	139	138	M

Cuadro 3.7: Matriz Final Subproblema 2

subproblemas:

Subproblema 3 *Se impone* $2 \not\to 5$, *es decir,* $x_{25} = 0$ *y* $c_{25} = M$ *sobre el Subproblema 1.*

Subproblema 4 *Se impone* $5 \not\to 2$, *es decir,* $x_{52} = 0$ *y* $c_{52} = M$ *sobre el Subproblema 1.*

El árbol de ramificación hasta este punto se ilustra en la Figura 3.2.

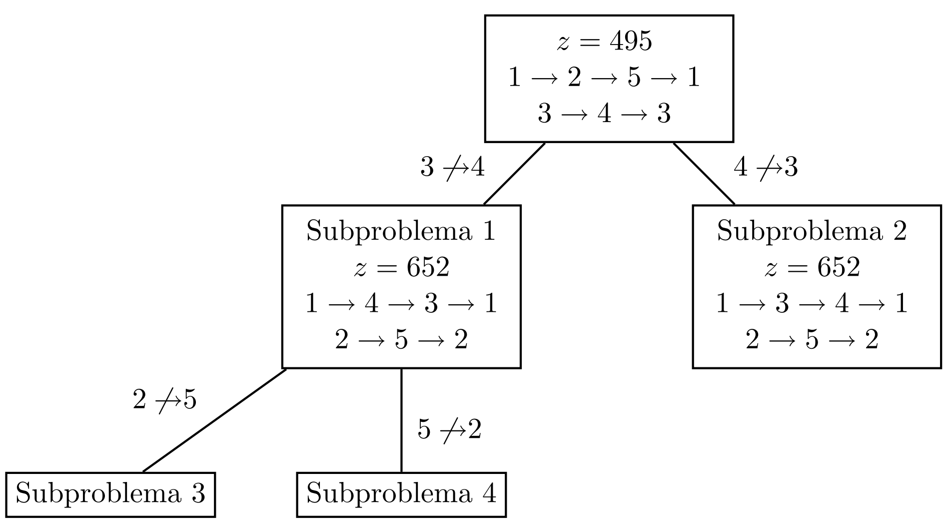

Figura 3.2: Árbol de Ramificación Actualizado

Para resolver el Subproblema 3 agregamos una M en la combinación $2 - 5$ en el Cuadro 3.5. El tableau deja de ser final ya que el número mínimo de líneas para cubrir todos los ceros es 4 (Cuadro 3.8). Iterando se obtiene el Cuadro 3.9 en cual se puede asignar.

Luego, la solución óptima para el Subproblema 3 corresponde a la secuencia $1 \to 5 \to 2 \to 4 \to 3 \to 1$ con una distancia total asociada de: $z = 58 + 79 + 201 + 113 + 217 = 668$. La secuencia anterior

M	0	106	0	0
0	M	158	16	M
0	52	M	M	139
51	67	0	M	136
0	0	245	85	M

Cuadro 3.8: Matriz Inicial Subproblema 3

M	∅	106	∅	$\boxed{0}$
∅	M	142	$\boxed{0}$	M
$\boxed{0}$	36	M	M	123
67	67	$\boxed{0}$	M	136
16	$\boxed{0}$	245	85	M

Cuadro 3.9: Matriz Final Subproblema 3

conforma un tour, por la tanto constituye una solución factible para el problema del Vendedor Viajero. Como por el momento es la mejor solución disponible fijaremos 668 como **cota superior** para el problema. El resultado anterior no evita resolver el Subproblema 4, ya que aún es posible encontrar una solución que sea mayor a 652, pero inferior a 668.

Para resolver el Subproblema 4 incorporamos una M a la combinación $5-2$ del Cuadro 3.5. Una vez más podemos trazar un número inferior a 5 líneas por lo que debemos volver a iterar (Cuadro 3.10).

Nuevamente se puede volver a trazar 4 líneas y volver a iterar (Cuadro 3.11).

Finalmente podemos asignar, obteniendo la secuencia $1 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 1$ con una distancia total asociada de: $z = 164+113+290+79+58 = 704$ (Cuadro 12). La secuencia encontrada constituye un tour, por lo que representa una solución factible. Sin embargo, la solución obtenida está por sobre la cota superior por lo que puede ser desechada.

Como en la rama de la derecha (Subproblema 2), el valor de la función objetivo está por debajo de la cota superior, debemos completar la ramificación pues aún es factible encontrar una solución que sea igual o mayor a 652, pero por debajo de la cota superior.

Como la secuencia obtenida en el Subproblema 2 es $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ y $2 \rightarrow 5 \rightarrow 2$, con un largo total: $z = 217 + 113 + 164 + 79 + 79 = 652$ (Cuadro 3.7) debemos escoger uno de los subtour e

M	0	106	0	0
0	M	158	16	0
0	52	M	M	139
51	67	0	M	136
0	M	245	85	M

Cuadro 3.10: Matriz Inicial Subproblema 4

M	0	106	0	16
0	M	142	0	0
0	36	M	M	139
67	67	0	M	152
0	M	229	69	M

Cuadro 3.11: Segunda Iteración Subproblema 4

M	$\emptyset$	106	$\boxed{0}$	16
36	M	142	$\emptyset$	$\boxed{0}$
$\emptyset$	$\boxed{0}$	M	M	103
103	67	$\boxed{0}$	M	152
$\boxed{0}$	M	229	69	M

Cuadro 3.12: Matriz final Subproblema 4

impedirlo, por ejemplo el más más corto. Por lo tanto, debemos interrumpir el subtour $2 \rightarrow 5 \rightarrow 2$, es decir generamos los subproblemas:

Subproblema 5 *Se impone* $2 \not\rightarrow 5$, *es decir,* $x_{25} = 0$ *y* $c_{25} = M$ *sobre el Subproblema 2.*

Subproblema 6 *Se impone* $5 \not\rightarrow 2$, *es decir,* $x_{52} = 0$ *y* $c_{52} = M$ *sobre el Subproblema 2.*

Siguiendo la metodología empleada anteriormente, reemplazamos la M respectiva en cada problema en la matriz final del Subproblema 2 e iteramos en caso de ser necesario.

La solución del Subproblema 5 genera la secuencia: $1 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$, con una distancia total asociada de $z = 704$. La solución constituye un tour, pero está por sobre la cota superior, por lo que puede ser descartada.

La solución del Subproblema 6 genera la secuencia: $1 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ y $2 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 2$, con una distancia total asociada de $z = 910$. Como la solución obtenida contiene dos subtours, no representa una solución óptima. Además, no conviene seguir ramificando pues el valor de la función objetivo está muy por sobre la cota superior y al ramificar sólo se obtendrán valores iguales o peores al de partida.

En suma, la mejor solución es la obtenida a través del Subproblema 3, dada por la secuencia: $1 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ con una distancia total asociada de: $z = 58 + 79 + 201 + 113 + 217 = 668$. La Figura 3.3 muestra el árbol de ramificación completo.

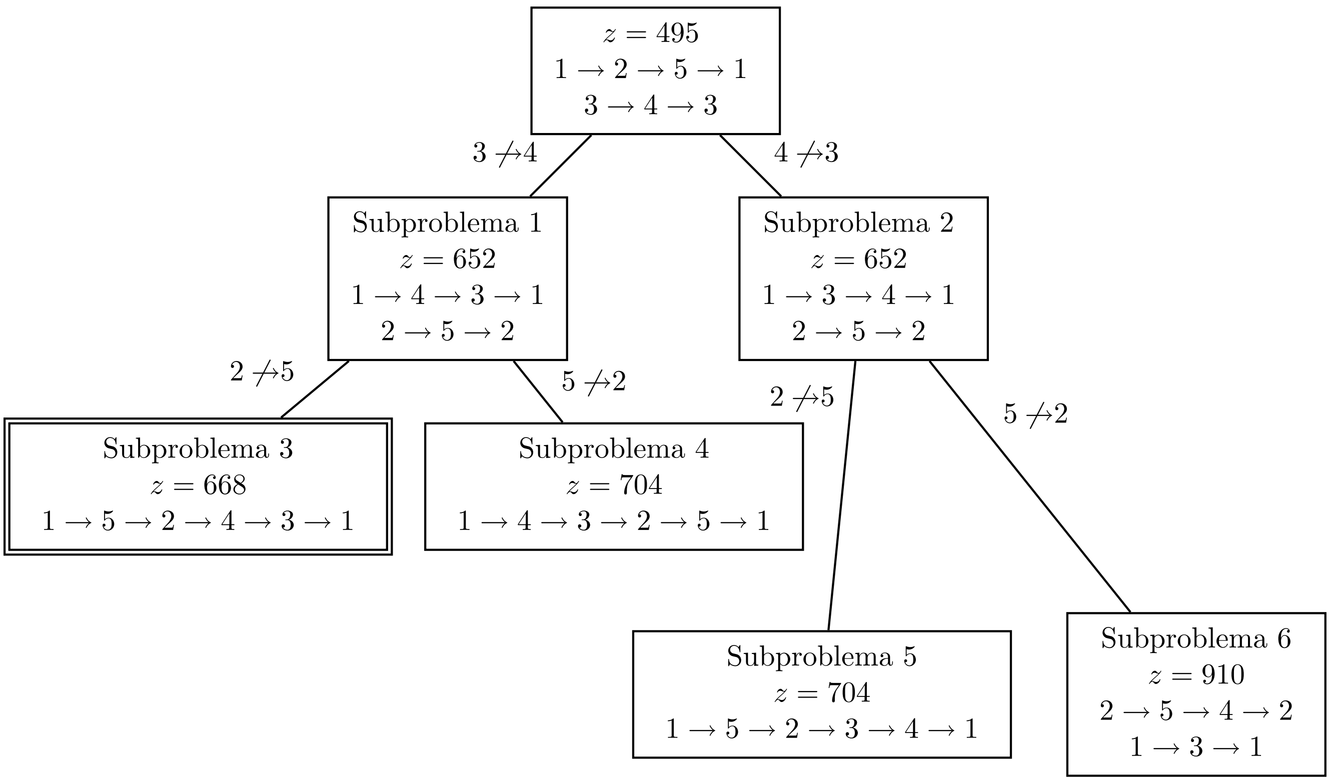

Figura 3.3: Árbol de Ramificación Final